Klausur zur „Linearen Algebra II“ (SS 93)

Bearbeitungszeit: 180 Minuten

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden.
Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 50 Punkte notwendig. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Es sei $P_3 = \{a+bx+cx^2+dx^3 | a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome p mit $\mathrm{Grad}(p) \leq 3$. Es sei weiter $\Phi : P_3 \times P_3 \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt gegeben durch $\Phi(f,g) = f(1)g(1) - f(0)g(0)$ für $f, g \in P_3$. Eine Basis B von P_3 ist $(1, x, x^2, x^3)$.

1. Man berechne ${}_B\Phi_B$. *3 Punkte*
2. Man berechne $Rad(\Phi)$ *3 Punkte*
3. Man berechne Rang, Signatur und Index von Φ. *5 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei $V = \mathbb{R}^3$, B eine Basis und φ die lineare Abbildung mit

$$ {}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -12 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

1. Man bestimem die Jordannormalform von φ. *5 Punkte*
2. Man bestimme eine Basis C von V, so daß ${}_C\varphi_C$ in Jordannormalform ist. *6 Punkte*

HINWEIS: Die Eigenwerte von φ sind ganzzahlig.

Aufgabe 3.
Es sei $V = \mathbb{R}^3$, Φ ein positiv definites Skalarprodukt, B eine Orthonormalbasis und $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,V)$ gegeben durch ${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Man bestimme eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von φ. *10 Punkte*
HINWEIS: Die Eigenwerte von φ sind ganzzahlig.

Aufgabe 4.
Wieviele Klassen ähnlicher, invertierbarer Matrizen gibt es in ${\mathbb{F}_3}^{2\times 2}$? Man gebe aus jeder Klasse eine Matrix an. *8 Punkte*

Aufgabe 5.
Es sei K ein Körper. Es seien $A, B \in K^{3\times 3}$ Matrizen mit gleichem charakteristischen Polynom und gleichem Minimalpolynom. Man zeige: A und B sind ähnlich. *10 Punkte*
Gilt diese Aussage auch für Matrizen in $K^{n\times n}$ mit $n > 3$? (Beweis oder Gegenbeispiel!) *4 Punkte*

Aufgabe 6.
Es sei V ein n-dim. $\mathbb{C}$-Vektorraum, Φ ein positiv definites Hermitesches Produkt und $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,V)$. Welche der folgenden Bedingungen sind hinreichend, welche notwendig dafür, daß V eine Basis aus Eigenvektoren von φ besitzt? (Kurze Begründung oder Gegenbeispiel!)

1. φ hat n verschiedene Eigenwerte. *2 Punkte*
2. φ ist Hermitesch bezüglich Φ. *2 Punkte*
3. φ hat nur eindimensionale Jordankästchen. *2 Punkte*
4. Die zu φ gehörenden Elementarteiler sind konstant oder linear. *2 Punkte*
5. $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi^2)$. *2 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei $\mathbb{F}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ der Körper mit fünf Elementen. Es seien weiter

$$f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x \text{ und } g = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

aus $\mathbb{F}_5[x]$ gegeben. Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler d mit führendem Koeffizienten 1 von f und g sowie Polynome a und b mit $d = f \cdot a + g \cdot b$. *8 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei $A = (a_{ij}) \in K^{2n\times 2n}$ definiert durch $a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i+j = 2n+1 \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$.
Berechnen Sie zunächst das Minimalpolynom, dann das charakteristische Polynom und eine Normalform von A. *12 Punkte*

HINWEIS : Berechnen Sie A^2. Versuchen Sie nicht, das charakteristische Polynom direkt zu berechnen, sondern leiten Sie es mit Hilfe des Minimalpolynoms her. Unterscheiden Sie die Fälle *char* $K = 2$ und *char* $K \neq 2$.
ZUSATZ : Falls Sie mit der Lösung der Aufgabe für beliebiges n Schwierigkeiten haben, bearbeiten Sie statt dessen diese Frage für $n = 4$ (dafür gibt es aber nur 5 Punkte).

Aufgabe 9.
Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ der Körper mit zwei Elementen und $f = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.

1. Man zeige: $K = \mathbb{F}_2[X]/(f)$ ist ein Körper. *3 Punkte*
2. Man bestimme ein $g \in \mathbb{F}_2[x]$ mit $\mathrm{Grad}(g) \leq 2$ und $((f)+x)^5 = (f) + g$. *5 Punkte*

Aufgabe 10.
Es sei B die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Es sei $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots \\ b & a & b & \cdots \\ b & b & a & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Man zeige: $\varphi \geq 0$ (bezgl. des Standardskalarproduktes) genau dann,
wenn $(a-b) \geq 0$ und $a + (n-1)b \geq 0$. *12 Punkte*
HINWEIS: Man zeige, daß $(a-b)$ Eigenwert von φ ist, und benutze den Spektralsatz.