05.08.2004

Scheinklausur zur Linearen Algebra II, SS 04

Prof. Dr. H. Pahlings

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Eigenhändige Unterschrift: ____________________

	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									
Nachk.									

Bitte beachten Sie:

- Bearbeiten Sie auf jeder Seite nur **eine** Aufgabe.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Von den angegebenen 8 Aufgaben für insgesamt 60 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten.
- Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 25 Punkte notwendig.
- Ausführliche Begründungen bilden einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe.
- Achten Sie bei Beweisen auf die Vollständigkeit Ihrer Argumentation.
- Außer Schreibzeug und Papier sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1: *7 Punkte*

Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler d von

$$f = X^5 + X^4 + X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[X] \quad \text{und} \quad g = X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$$

und finden Sie Polynome $f_1, g_1 \in \mathbb{Z}_2[X]$ mit

$$d = f \cdot f_1 + g \cdot g_1.$$

Aufgabe 2: *8 Punkte*

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{4\times 4}$$

Berechnen Sie

a) die rationale kanonische Form von A.

b) das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A.

c) die Weierstraßsche Normalform von A.

d) die Jordansche Normalform von A, falls sie existiert.

Aufgabe 3: *7 Punkte*

Es sei K ein Körper.

a) Geben Sie zwei Matrizen $A, B \in K^{4\times 4}$ mit $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$ an, die nicht ähnlich sind. Begründen Sie für jede der drei Eigenschaften, warum sie erfüllt ist.

b) Beweisen Sie: Zwei Matrizen $A, B \in K^{3\times 3}$ mit $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$ sind ähnlich.

Aufgabe 4: *7 Punkte*

Es seien

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -5 \\ -2 & 4 & 30 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$$

und M_i die von den Spalten von A_i erzeugte Untergruppe von $G = \mathbb{Z}^{3\times 1}$ für $i = 1, 2$.

a) Ist $M_1 = M_2$?

b) Ist $G/M_1 \cong G/M_2$?

c) Wieviele Elemente enthält G/M_1?

Bitte wenden

Aufgabe 5: *8 Punkte*

Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit Gram–Matrix $A = [a_{ij}]$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$.

Beweisen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel die folgenden Aussagen.

a) Ist $a_{ij} > 0$ für $1 \leq i, j \leq n$, so ist Φ positiv definit.

b) Ist Φ positiv definit, so ist $a_{ii} > 0$ für $1 \leq i \leq n$.

c) Ist $\det A > 0$ und Spur$A > 0$, so ist Φ positiv definit.

d) Ist Φ positiv definit, so ist $\det A > 0$ und Spur$A > 0$.

Aufgabe 6: *8 Punkte*

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 8 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4},$$

$\mathcal{B}$ die Standardbasis des $\mathbb{Q}$–Vektorraums $V = \mathbb{Q}^{4\times 4}$ und $\Phi : V \times V \to \mathbb{Q}$ eine Bilinearform mit $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = A$.

a) Geben Sie eine Orthogonalbasis $\mathcal{O}$ von V bezüglich Φ an und bestimmen Sie $\mathrm{M}_{\mathcal{O}}(\Phi)$.

b) Ist Φ ausgeartet?

c) Finden Sie einen Teilraum U maximaler Dimension mit der Eigenschaft, dass $\Phi|_{U\times U}$ positiv definit ist und geben Sie eine Basis von U an.

Aufgabe 7: *8 Punkte*

Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und $V = K^{2\times 1}$.

a) Wie viele Elemente hat $V \otimes V$?

b) Wie viele Elemente von V kann man in der Form $v_1 \otimes v_2$ mit $v_1, v_2 \in V$ schreiben?

c) Gibt es einen Isomorphismus $\varphi : V \otimes V \to K^{2\times 2}$ mit

$$\varphi(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}?$$

Vergessen Sie nicht, Ihre Antworten zu begründen.

Aufgabe 8: *7 Punkte*

Es sei

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} = V$$

und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V$ definiert durch $\varphi(A) = F \cdot A$.

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von φ.

b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von $\varphi \wedge \varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}} \bigwedge^2 V$.

c) Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\bigwedge^2 V$ an und die Matrix von $\varphi \wedge \varphi$ bezüglich $\mathcal{B}$.
