12.10.2004

Nachholklausur zur Linearen Algebra II, SS 04

Prof. Dr. H. Pahlings

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________________

	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									

Bitte beachten Sie:

- Bearbeiten Sie auf jeder Seite nur **eine** Aufgabe.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Von den angegebenen 8 Aufgaben für insgesamt 60 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten.
- Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 25 Punkte notwendig.
- Ausführliche Begründungen bilden einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe.
- Achten Sie bei Beweisen auf die Vollständigkeit Ihrer Argumentation.
- Außer Schreibzeug und Papier sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1: *7 Punkte*

Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus einen größten gemeinsamen Teiler d von

$$f_1 = X^3 - X^2 - X - 2 \in \mathbb{Q}[X] \quad \text{und} \quad f_2 = X^5 - 4X^3 + X^2 - 4 \in \mathbb{Q}[X]$$

und bestimmen Sie alle $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit $f_1(A) = f_2(A) = 0 \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

Aufgabe 2: *8 Punkte*

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A = [a_{ij}] \in K^{2n\times 2n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i+j \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von A.

b) Berechnen Sie die Jordansche Normalform $J(A)$ von A.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle char$(K) = 2$ und char$(K) \neq 2$.

Aufgabe 3: *7 Punkte*

Es seien

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 26 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 6 & 2 & -4 \\ 9 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$$

und M_i die von den Spalten von A_i erzeugte Untergruppe von $G = \mathbb{Z}^{3\times 1}$ für $i = 1, 2$.

a) Ist $M_1 = M_2$?

b) Ist $G/M_1 \cong G/M_2$?

c) Wieviele Elemente enthält G/M_1?

Aufgabe 4: *8 Punkte*

Es sei φ eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^{2\times 1}$ mit $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = 3x^2 - 4xy + 3y^2$.

a) Berechnen Sie die Gram–Matrix A der zugehörigen symmetrischen Biliniearform

$$\Phi : \mathbb{R}^{2\times 1} \times \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}$$

bezüglich der Standardbasis.

b) Ist Φ positiv definit?

c) Berechnen Sie eine orthogonale Matrix S, so dass $S^{\mathrm{T}}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Bitte wenden

Aufgabe 5: *7 Punkte*

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und φ die quadratische Form auf $\mathbb{R}^{3\times 1}$ mit

$$\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = x^2 - y^2 - z^2.$$

Es sei Φ die zu φ gehörende symmetrische Bilinearform. Gibt es eine Basisfolge $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^{3\times 1}$, so dass $\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\Psi) = A$ ist?

Aufgabe 6: *8 Punkte*

a) Zeigen Sie für $A, B \in K^{m\times n}$: Rang$(A + B) \leq$ Rang(A) + Rang(B).

b) Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ man in der Form

$$A = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ und $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ schreiben kann. Bestimmen Sie gegebenenfalls eine solche Darstellung.

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad 2) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7: *8 Punkte*

Berechnen Sie die Plückerkoordinaten von

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle =: \langle v_1, v_2 \rangle$$

d.h. die Koordinaten von $v_1 \wedge v_2$ bezüglich der Standardbasis $\bigwedge^2 \mathcal{E}$ von $\bigwedge^2(\mathbb{R}^{3\times 1})$, wobei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ ist.

Aufgabe 8: *7 Punkte*

Es sei $E_2 \neq A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine orthogonale Matrix mit $\det A = 1$ und $a \in \mathbb{R}^{2\times 1}$. Zeigen Sie, dass die affine Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$, $x \mapsto Ax + a$ einen Fixpunkt hat.
