Aufgabe 1

a) Für $a = 2$ bringt man $(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$ auf die Normalform $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$.

Daraus ließt man ab:

$$\text{Ł}(A, b) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle.$$

b) Das LGS

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist – wie man sofort am Vergleich der ersten und dritten Zeile sieht – unlösbar.

c) Man kann (A, b) unabhängig von a auf folgende Zeilenstufenform bringen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & a^2-4 \end{array}\right).$$

Daraus ließt man ab (die rechte Spalte wird ignoriert):

$$\operatorname{Rg} A = \begin{cases} 2 & \text{falls } a = 2, \\ 3 & \text{falls } a \neq 2. \end{cases}$$

d) Aus obiger Zeilenstufenform von (A, b) ließt man ferner ab:

Fall 1: $a \neq \pm 2$. $Ax = b$ ist unlösbar.

Fall 2: $a = 2$. $Ax = b$ ist mehrdeutig lösbar mit 1 freien Unbekannten.

Fall 3: $a = -2$. $Ax = b$ ist eindeutig lösbar (d.h. 0 freie Unbekannte).

Aufgabe 2

Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_A = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -2 \\ 1 & x+2 & -1 \\ -2 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = \ldots = x(x-1)(x-2).$$

Die Eigenwerte von A lauten also $0, 1, 2$ und A ist ähnlich zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu $0, 1$ bzw. 2 sind z.B. (in dieser Reihenfolge):

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Also erfüllt

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

die geforderte Bedingung.

Aufgabe 3

Das charakteristische Polynom lautet $\chi_A = x^2 - x + 1$. Nach Cayley-Hamilton gilt also $A^2 - A + E = 0$, wobei E die 2×2-Einheitsmatrix und 0 die 2×2-Nullmatrix bezeichnet. Daraus folgen nacheinander:

$$\begin{aligned}
A^2 &= A - E = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \\
A^3 &= A \cdot A^2 = A \cdot (A - E) = A^2 - A = (A - E) - A = -E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
A^6 &= (A^3)^2 = (-E)^2 = (-1)^2 E^2 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
A^{1000} &= (A^3)^{333} \cdot A = (-E)^{333} \cdot A = (-1)^{333} E^{333} \cdot A = -E \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Eine Orthogonalbasis (u_1, u_2) von E erhält man nach Gram-Schmidt so:

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{4}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Zerlegung $v = v_0 + v_\perp$ lautet:

$$v_0 = \pi_E(v) = \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{6}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_\perp = v - v_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

c) Die Zerlegung $w = w_0 + w_\perp$ lautet:

$$w_0 = \pi_E(w) = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_\perp = w - w_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

An den Vorzeichen der Einträge von $v_\perp$ und $w_\perp$ erkennt man, daß v und w auf derselben Seite von E liegen.

Aufgabe 5

Eine allgemeine Matrix $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbb{R}^{2\times 2}$ wird unter φ abgebildet:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c & d-a \\ d-a & -b-c \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Nach (1) liegt X genau dann in $\operatorname{Ker}\varphi$ wenn $c = -b$ und $d = a$ ist. Also gilt

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Letztere beiden Matrizen sind offensichtlich linear unabhängig, bilden also eine Basis von $\operatorname{Ker}\varphi$.

b) Nach a) ist $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 2$, woraus $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 4 - \dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 2$ folgt. Je zwei linear unabhängige Elemente aus $\operatorname{Im}\varphi$ bilden also eine Basis von $\operatorname{Im}\varphi$. Nach (1) sind z.B.

$$\varphi(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}\varphi.$$

Da diese beiden Matrizen offensichtlich linear unabhängig sind, bilden sie also eine Basis von $\operatorname{Im}\varphi$.

Aufgabe 6

U ist per Definition genau dann φ-invariant wenn $\varphi(U) \subseteq U$.

a) Aus $\varphi(U) \subseteq U$ folgt $\varphi(\varphi(U)) \subseteq \varphi(U)$, also

$$\varphi^2(U) = \varphi(\varphi(U)) \subseteq \varphi(U) \subseteq U.$$

Das bedeutet gerade, daß U invariant unter φ^2 ist.

b) Wegen der Bijektivität von φ ist $\dim \varphi(U) = \dim U$. Daher folgt aus $\varphi(U) \subseteq U$ sogar $\varphi(U) = U$. Also weiter

$$U = \mathrm{id}(U) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(U) = \varphi^{-1}(\varphi(U)) = \varphi^{-1}(U).$$

Damit ist gezeigt, daß U invariant unter φ^{-1} ist.