Klausur zur Vorlesung Algebra I (WS 2002/2003)

Prof. Dr. G. Hiß

Von den 14 folgenden Aufgaben dürfen Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Insgesamt sind 50 Punkte erreichbar, zum Bestehen der Klausur sind 25 Punkte notwendig. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt und geben Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an. **Hilfsmittel sind nicht erlaubt.** Bitte beachten Sie, dass **Begründungen** einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Viel Erfolg!

Hinweis: Gemäß der Konvention der Vorlesung ist $0 \notin \mathbb{N}$.

Aufgabe 1.

Wieviele Teilkörper hat ein Körper mit 125 Elementen? *2 Punkte*

Aufgabe 2.

Es seien $f = X^3 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ normal ist. *3 Punkte*

Aufgabe 3.

Es seien $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $X^3 - X^2 + X - 3$ und $b = a^2 - a - 1 \in \mathbb{Q}(a)$.
Berechnen Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(a) = b^{-1}$ und $\deg f \leqslant 2$. *6 Punkte*

Aufgabe 4.

Es seien L/K eine endliche Körpererweiterung, $a \in L$ und $[K(a) : K]$ ungerade.
Zeigen Sie, dass $K(a) = K(a^2)$ ist. *2 Punkte*

Aufgabe 5.

Es sei L/K eine endliche Körpererweiterung mit $\operatorname{char} K \nmid [L : K]$.
Zeigen Sie, dass L separabel über K ist. *4 Punkte*

Aufgabe 6.

Zeigen Sie, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ unendlich viele irreduzible Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ vom Grad n gibt. *3 Punkte*

Aufgabe 7.

Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel (im jeweils angegebenen Polynomring)?

a) $2X^5 - 6 \in \mathbb{Z}[X]$ *1 Punkt*

$2X^5 - 6 \in \mathbb{Q}[X]$ *1 Punkt*

$2X^5 - 6 \in \mathbb{R}[X]$ *1 Punkt*

b) $X^3 + 3X^2 - 12X - 36 \in \mathbb{Z}[X]$ *2 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl mit $p \geqslant 5$. Zeigen Sie, dass $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ genau dann reduzibel ist, wenn $p \equiv 1 \pmod 3$ ist. *3 Punkte*

Aufgabe 9.
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $0 \neq a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ entweder a ein Nullteiler oder invertierbar ist. *3 Punkte*

Aufgabe 10.
Es sei $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$ und $Z[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen.

a) Bestimmen Sie die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}[i]$. *2 Punkte*

b) Ist $10 = 2 \cdot 5 = (3 + i) \cdot (3 - i)$ ein Beispiel für eine nicht-eindeutige Zerlegung in ein Produkt irreduzibler Elemente in $\mathbb{Z}[i]$? *1 Punkt*

Aufgabe 11.
Es seien G eine Gruppe und $a, b, c \in G$ mit $abc = 1$. Zeigen Sie, dass $ca = b^{-1}$ ist. *2 Punkte*

Aufgabe 12.

a) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 45 abelsch ist. *6 Punkte*

b) Geben Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 45 an. *2 Punkte*

Aufgabe 13.
Es seien G eine Gruppe und $g, h \in G$ mit $G = \langle g, h \rangle$. Es gelte $g^3 = h^2 = (gh)^7 = 1$.
Zeigen Sie, dass $G/G' = \{1\}$ gilt. *3 Punkte*

Aufgabe 14.
Es sei $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$ und $\underline{n} = \{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$. Die symmetrische Gruppe S_n operiere in natürlicher Weise auf $M := \{S \subset \underline{n} \mid |S| = 3\}$ (nämlich durch $S_n \times M \to M$, $(\pi, \{s_1, s_2, s_3\}) \mapsto \{\pi(s_1), \pi(s_2), \pi(s_3)\}$).
Wieviele Elemente liegen in der Bahn von $\{1, 2, 3\}$? *3 Punkte*