G. Nebe, M. Künzer 04.02.2005

Algebra I, WS 04/05

Klausur II

Dauer: 150 Minuten.

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beliebig beschriebenes Blatt DIN A4.

In der Klausur sind insgesamt 60 Punkte erreichbar.

Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite bearbeitet werden. Wer mehr Papier benötigt, bitte melden.

Aufgabe 1 **(9 Punkte)**

Gegeben sei der Morphismus von $\mathbf{Z}$-Moduln

$$(X \xrightarrow{u} Y) \;:=\; \left(\mathbf{Z}/(4) \oplus \mathbf{Z}/(4) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}2&2\\4&4\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/(4) \oplus \mathbf{Z}/(8)\right) .$$

Berechne $\mathrm{Kern}(u)$, $\mathrm{Bild}(u)$ und $\mathrm{Cokern}(u)$.

Aufgabe 2 **(3+9+4+2+2 Punkte)**

Sei $K = \mathbf{Q}$ und sei $f(X) = X^3 + 2X^2 + 2 \in \mathbf{Q}[X]$. Sei E der Zerfällungskörper von $f(X)$.

(1) Zeige, daß $f(X) \in \mathbf{Q}[X]$ irreduzibel und separabel ist.

(2) Gib Erzeuger von $\mathrm{Gal}(E|K)$ an, eingebettet in eine geeignete symmetrische Gruppe. (Hinweis: Nachweis einer Irreduzibilität mit $\mathbf{R}$ möglich, beachte $f(-2)$.)

(3) Bestimme für alle echten Zwischenkörper $K \subsetneq L \subsetneq E$ Erzeuger über K.

(4) Entscheide, welche der Zwischenkörper aus (3) galoisch über K sind.

(5) Gib für einen Zwischenkörper L mit $[L : K] = 2$ eine Normalbasis an.

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Schreibe $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 \in \mathbf{Q}[X_1, X_2, X_3]$ als Polynom in elementarsymmetrischen Polynomen.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Bestimme alle irreduziblen normierten Polynome von Grad 2 in $\mathbf{F}_4[X]$.

Aufgabe 5 **(5 Punkte)**

Sei K ein Körper, sei p eine Primzahl, und sei $f(X) \in K[X]$ irreduzibel und separabel von Grad $\deg(f) = p$. Sei E der Zerfällungskörper von $f(X)$. Zeige, daß es in $\mathrm{Gal}(E|K)$ ein Element der Ordnung p gibt.

Aufgabe 6 **(5 Punkte)**

Sei $\Phi_m(X) \in \mathbf{Z}[X]$ das $m$te Kreisteilungspolynom. Zeige, daß $\Phi_{2m}(X) = \Phi_m(-X)$ für ungerades $m \geq 3$.

Aufgabe 7 **(9 Punkte)**

Zeige oder widerlege.

(1) Sei R ein kommutativer Ring, und sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Ist R noethersch, so auch $R/\mathfrak{a}$.

(2) Es gibt in $\mathbf{F}_{32}$ einen Teilkörper aus 8 Elementen.

(3) Sei K ein Körper, sei $f(X) \in K[X]$ irreduzibel und separabel, und sei $E|K$ Zerfällungskörper von $f(X)$. Ist $\mathrm{Gal}(E|K)$ abelsch, so ist E auch Wurzelkörper von $f(X)$.