Nachholklausur zur Algebra I (WS 89/90)

Prof. Dr. Neubüser

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters ein. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 30 Punkte erreicht werden. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Wir machen darauf aufmerksam, daß bis zum Ende des auf die Vorlesung folgenden Semesters nicht abgeholte Klausuren (und Übungen) vernichtet werden. Anspruch auf Anrechnen besteht dann nicht mehr.

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie die Konjugiertenklassen von S_4, der symmetrischen Gruppe auf 4 Punkten.

(b) Bestimmen Sie alle Normalteiler von S_4. 8 Pkte.

Aufgabe 2.

Zeigen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung 85 zyklisch ist. 6 Pkte.

Aufgabe 3.

Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler in G und U, V Untergruppen mit $U, V \neq \{1\}$ und $U \cap N = V \cap N = \{1\}$.

Zeigen Sie: Ist N eine maximale Untergruppe (d.h. für alle $H \leq G$ mit $N \subseteq H \subseteq G$ folgt $H = N$ oder $H = G$), so sind U und V isomorph.

Hinweis: Zeichnen Sie Sich ein Untergruppenverbandsdiagramm, das die in der Voraussetzung gegebene Situation wiedergibt. 10 Pkte.

Aufgabe 4.

Bestimmen Sie alle Nullteiler, Einheiten und Ideale in $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$. 7 Pkte.

Aufgabe 5.

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ und $I = (2)$ das von 2 erzeugte Ideal in R.

Ist I ein Primideal, ist I ein maximales Ideal? Begründen Sie Ihre Antworten. 6 Pkte.

Aufgabe 6.
Welche der folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[x]$ sind irreduzibel ?
(a) $f = x^3 + 5x^2 + 3x + 1$
(b) $f = x^{27} - 38x^5 + 1990x - 2$
(c) $f = x^5 - x^2 - x + 1$
Begründen Sie Ihre Antworten ! 6 Pkte.

Aufgabe 7.
Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $A = R^{2\times 2}$ der Ring der 2×2-Matrizen mit Einträgen in R (mit der üblichen Matrixaddition und -multiplikation). Bestimmen Sie das von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugte Links-, Rechts- und zweiseitige Ideal. 6 Pkte.

Aufgabe 8.
Sei $f = x^3 - 17 \in \mathbb{Q}[x]$.
(a) Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper L von f und dessen Dimension über $\mathbb{Q}$.
(b) Berechnen Sie $\mathrm{Aut}(L)$ und alle Körper M mit $\mathbb{Q} \subseteq M \subseteq L$. 10 Pkte.

Aufgabe 9.
Seien $a, b \in \mathbb{Q}$, $a, b \neq 0$ und $a \neq b$. Zeigen Sie, daß $c := \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ein primitives Element der Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \supseteq \mathbb{Q}$ ist, d.h. es gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(c)$. 6 Pkte.