Klausur zur Algebra I (WS 89/90)

Prof. Dr. Neubüser

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters ein. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 30 Punkte erreicht werden. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Wir machen darauf aufmerksam, daß bis zum Ende des auf die Vorlesung folgenden Semesters nicht abgeholte Klausuren (und Übungen) vernichtet werden. Anspruch auf Anrechnen besteht dann nicht mehr.

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie alle Untergruppen und Normalteiler von $GL_2(2)$ ($=SL_2(2)$), der Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen (der Determinante 1) mit Einträgen im Körper mit 2 Elementen. 9 Pkte.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung 1990 auflösbar ist. 8 Pkte.

Aufgabe 3.
(a) Sei G eine Gruppe und A, N Normalteiler von G. Zeigen Sie: Wenn A einfach ist, dann ist entweder $A \subseteq N$ oder $A \cap N = \{1\}$.
(b) Benutzen Sie (a) und die Einfachheit von A_5, um nun zu zeigen, daß $\{1\}$, A_5 und S_5 die einzigen Normalteiler von S_5 sind. 10 Pkte.

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie alle Nullteiler, Einheiten und Ideale in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. 8 Pkte.

Aufgabe 5.
Sei $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ (mit $i^2 = -1$) und $I = (2)$ das von 2 erzeugte Ideal in R.
(a) Bestimmen Sie Repräsentanten für die Restklassen von R nach I.
(b) Zeigen Sie (zum Beispiel unter Benutzung von (a)), daß I kein Primideal ist. 6 Pkte.

Aufgabe 6.
Welche der folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[x]$ sind irreduzibel ?
(a) $f = x^3 + 2x^2 + x + 1$
(b) $f = x^5 - 18x^3 + 9x^2 + 15x + 6$
(c) $f = x^5 + 1$
Begründen Sie Ihre Antworten ! 6 Pkte.

Aufgabe 7.
Sei $f := x^3 + 2x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ und $K := \mathbb{Q}[x]/(f)$.
(a) Zeigen Sie, daß f irreduzibel ist.
(b) Nach (a) ist K ein Körper (das braucht nicht mehr gezeigt zu werden). Bestimmen Sie das Inverse des Elementes $(f) + x + 1 \in K$ (d.h. finden Sie ein Polynom $g \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\operatorname{Grad} g \leq 2$ und $g \cdot (x+1) - 1 \in (f)$).
7 Pkte.

Aufgabe 8.
Sei $f = x^4 - 9 \in \mathbb{Q}[x]$.
(a) Zeigen Sie, daß jeder irreduzible Faktor von f separabel über $\mathbb{Q}$ ist.
(b) Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper L von f und dessen Dimension über $\mathbb{Q}$.
(c) Berechnen Sie $\operatorname{Aut}(L)$.
(d) Bestimmen Sie alle Körper M mit $\mathbb{Q} \subseteq M \subseteq L$. 10 Pkte.