Nachhol-Scheinklausur zur Algebra I (WS 2000/01)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Bei richtiger Bearbeitung aller Aufgaben können 50 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur sind 25 Punkte notwendig. Beachten Sie, dass ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösungen darstellen.
Die Bearbeitungszeit der Aufgaben ist 150 Minuten.
Die Rückgabe und Einsicht in die Klausur ist am 25.4.2001, am Lehrstuhl D, Raum 203, 15–17 Uhr.

Aufgabe 1 [4 Punkte] Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung 106, deren Zentrum gerade Ordnung hat, zyklisch ist.

Aufgabe 2 [6 Punkte] Es sei A eine abelsche Gruppe und $m \in A$ das Produkt sämtlicher Elemente von A.

(a) Falls A genau ein Element x der Ordnung 2 besitzt, so ist $m = x$.

(b) Zeigen Sie als Anwendung von (a) den *Satz von Wilson*: Für jede Primzahl p ist $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Aufgabe 3 [7 Punkte] Es sei p eine Primzahl, $k \in \mathbb{N}$ und $R = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$.

(a) Welche Elemente sind Einheiten in R?

(b) Die Nichteinheiten von R bilden ein maximales Ideal M.

(c) R/M ist isomorph zum Körper $\mathbb{F}_p$.

Aufgabe 4 [5 Punkte] Sei $R = \mathbb{Q}[X]$ der Polynomring über dem Körper der rationalen Zahlen und I das von $2 - 7X + 5X^2 - 3X^4 + X^5$ und $-6 + 5X - 3X^2 - 2X^3 + X^4 - X^5$ erzeugte Ideal in R.

(a) Ist I ein Haupideal? Falls ja, geben Sie ein erzeugendes Element an.

(b) Ist der Faktorring R/I ein Körper?

Aufgabe 5 [9 Punkte] Berechnen Sie die Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$ für $f = X^{12} - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Ist G zyklisch? Wie operiert G auf den Nullstellen von f? Bestimmen Sie alle Unterkörper des Zerfällungskörpers von f.

Aufgabe 6 [7 Punkte] Sei $L \geq K$ eine galoissche Körpererweiterung vom Grad 330 mit Galoisgruppe G.

(a) Zeigen Sie, dass es einen echten Zwischenkörper $L > L' > K$ gibt, so dass auch $L' > K$ galoissch ist.

(b) Es gebe für jede Primzahl p einen Zwischenkörper $L \geq L_p \geq K$, so dass $[L : L_p]$ eine p-Potenz ist, $[L_p : K]$ nicht durch p teilbar ist und $L_p \geq K$ galoissch ist. Zeigen Sie, dass dann die Galoisgruppe G von einem Element erzeugt wird.

(c) G werde von einem Element erzeugt. Wieviele echte Zwischenkörper $L > L' > K$ gibt es dann?

Aufgabe 7 [6 Punkte] Wieviele 6-te Einheitswurzeln gibt es in: $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{F}_{16}$ und einem Körper der Charakteristik 7?

Aufgabe 8 [6 Punkte] Gegeben seien ein Kreis mit Radius 1 cm und eine Strecke der Länge π cm. Welche der folgenden Figuren können daraus mit Zirkel und Lineal konstruiert werden?

(a) Ein Kreis, der einen doppelt so großen Flächeninhalt hat, wie der gegebene.

(b) Ein Quadrat, dessen Flächeninhalt genau so groß, wie der des gegebenen Kreises ist.

(c) Ein regelmäßiges 7-Eck, das in den gegebenen Kreis einbeschrieben ist. (Hier dürfen Sie benutzen, dass jedes Element aus $\mathbb{Q}[\pi]$, das algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist, in $\mathbb{Q}$ liegt.)