Scheinklausur zur Algebra I
(WS 2000/01)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Bei richtiger Bearbeitung aller Aufgaben können 50 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur sind 25 Punkte notwendig. Beachten Sie, dass ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösungen darstellen.
Die Bearbeitungszeit der Aufgaben ist 150 Minuten.
Die Rückgabe und Einsicht in die Klausur ist am Mittwoch, dem 21. Februar 2001, am Lehrstuhl D, Raum 203, 14-17 Uhr.

Aufgabe 1 [6 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung 330 einen nicht-trivialen Normalteiler hat.

(b) Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung 330, in der jede p-Sylowgruppe ein Normalteiler ist, zyklisch ist.

(c) Für welche Gruppen G gibt es eine Primzahl p, so dass G genau zwei p-Sylowgruppen besitzt?

Aufgabe 2 [6 Punkte] Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Für alle $g, h \in G$ sind die Elemente gh und hg in G konjugiert.

(b) Sind alle Elemente aus $G \setminus \{1\}$ in G konjugiert, so ist $|G| = 2$.

(c) Gibt es in G genau ein Element der Ordnung 2, so ist $|Z(G)| > 1$.

Aufgabe 3 [5 Punkte] Es sei

$$G = \{[a_{ij}] \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \mid \exists \sigma \in S_3 \text{ und } a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma(i) \neq j \\ \pm 1 & \text{für } \sigma(i) = j \end{cases} \}.$$

(a) Zeigen Sie, dass G eine Gruppe ist und die Diagonalmatrizen in G einen Normalteiler bilden.

(b) Geben Sie eine Kompositionsreihe für G an.

Aufgabe 4 [5 Punkte] Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und

$$N = \{n \in R \mid \exists r \in R \setminus \{0\} : nr = 0\}.$$

Zeigen Sie:

(a) N ist multiplikativ abgeschlossen.

(b) Falls N sogar ein Ideal in R ist, so ist R/N ein Integritätsbereich.

(Anmerkung: Die ursprüngliche Formulierung der Aufgabe war irreführend, sie wurde hier deshalb etwas abgewandelt.)

Aufgabe 5 [7 Punkte] Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n und L der Zerfällungkörper von f über K.

(a) Welche Möglichkeiten gibt es für $[L : K]$, falls $n = 2$ ist? Ist in diesem Fall immer $L \geq K$ galoissch?

(b) Es sei $n = 3$ und $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{F}_5$. Ist dann $L \geq K$ immer galoissch? Welche Gruppen können in diesen beiden Fällen als Galoisgruppen $\mathrm{Gal}(L/K)$ vorkommen?

(c) Sei p eine Primzahl und $n = p - 1$. Zeigen Sie, dass dann $|\mathrm{Gal}(L/K)|$ nicht durch p teilbar ist.

Aufgabe 6 [9 Punkte] Berechnen Sie die Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$ für $f = X^6 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Ist G zyklisch? Wie operiert G auf den Nullstellen von f? Bestimmen Sie alle Unterkörper des Zerfällungskörpers von f.
(Hinweis: Beachten Sie, dass $X^6 + 1$ ein Teiler von $X^{12} - 1$ ist.)

Aufgabe 7 [6 Punkte] Warum sind die folgenden Polynome irreduzibel?

(a) $X^5 - 3X^4 + X^2 - 3X + 5 \in \mathbb{Q}[X]$

(b) $2X^{19} - 27X^7 + 12X^4 - 3X^2 + 15 \in \mathbb{Z}[X]$

(c) $X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_7[X]$

Aufgabe 8 [6 Punkte] Es sei K ein Körper mit 256 Elementen. Wie viele Unterkörper hat K? Wieviele Untergruppen hat die multiplikative Gruppe $K^\times$? Wieviele Elemente hat $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{F}_2)$?