2. Semesterklausur zur Algebra I (8. 2. 96)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 8 gegebenen Aufgaben für insgesamt 60 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Sie brauchen insgesamt (also aus beiden Semesterklausuren zusammen) mindestens 50 Punkte, um einen Übungsschein zu erhalten. Bitte beachten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Ordnen Sie die (hier in alphabetischer Reihenfolge angegebenen) Aussagen „R ist euklidischer Ring", „R ist faktorieller Ring", „R ist Hauptidealring" und „R ist Integritätsring" so an, daß jede aus der vorhergehenden folgt. (Ohne Begründung) *3 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei $R := \mathbb{Z}[i]$ der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen. Wie viele Elemente hat der Restklassenring $R/(2+i)$? Ist $R/(2+i)$ ein Körper? (Antwort jeweils mit Begründung) *8 Punkte*

Aufgabe 3.
Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel? (Antwort jeweils mit Begründung)

(a) $2X^5 - 10$, jeweils als Polynom in $\mathbb{Z}[X]$ bzw. in $\mathbb{Q}[X]$ bzw. in $\mathbb{R}[X]$, *5 Punkte*

(b) $X^3 + 3X^2 - 12X + 9 \in \mathbb{Z}[X]$. *3 Punkte*

Aufgabe 4.
Es sei $R = \mathbb{Q}[X]/(X^3 + X)$. Finden Sie alle Ideale von R. Welche davon sind Primideale, welche maximal? Zeichnen Sie ein Diagramm aller Ideale von R. (Begründen Sie Ihre Ergebnisse) *8 Punkte*

Aufgabe 5.
Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $X^4 + 3$ und $\beta = (1 - \alpha + \alpha^2) \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Berechnen Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad ≤ 3 mit $f(\alpha) = \beta^{-1}$. *9 Punkte*

Aufgabe 6.
Wie viele Unterkörper kann ein Körper mit 8 Elementen haben? (Mit Begründung) *5 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei $K = \mathbb{Q}$, $M = K(\sqrt{2})$ und $L = M(\sqrt{5})$, und es sei $\beta = \sqrt{2}$.

(a) Geben Sie eine K-Basis von M, eine M-Basis von L und eine K-Basis B von L an. *2 Punkte*

(b) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix ${}_B[\beta^\bullet]_B$ der durch $\beta^\bullet(x) = \beta x$ definierten K-linearen Abbildung $\beta^\bullet : L \to L$. *4 Punkte*

(c) Berechnen Sie daraus die Norm $\mathrm{N}_{L/K}(\beta)$ und die Spur $\mathrm{Tr}_{L/K}(\beta)$. *3 Punkte*

Aufgabe 8.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Fortsetzungssatzes die Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q})$. Bestimmen Sie die Nullstellen des Minimalpolynoms f_α von $\alpha = \sqrt{2} + i$ über $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$, und geben Sie zu jedem $\varphi \in G$ die zugehörige Permutation dieser Nullstellen an. Geben Sie schließlich f_α explizit in der Form $\sum_{i=0}^{4} a_i X^i \in \mathbb{Q}[X]$ an. *10 Punkte*
