Nachholklausur zur Algebra I (WS 90/91)

Prof. Dr. Schoenwaelder

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt sofort Ihren Namen. Schreiben Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Hinweis: Holen Sie Ihre Klausuren bitte ab! Nicht abgeholte Klausuren werden bis zum Ende des Sommersemesters am Lehrstuhl aufbewahrt, danach werden sie vernichtet.

Aufgabe 1. **(3 Punkte)**

Es sei G eine endliche Gruppe mit Untergruppen U und V. Zeigen Sie: gilt $Ug = Vh$ für zwei Nebenklassen Ug und Vh, so folgt $U = V$.

Aufgabe 2. **(5 Punkte)**

Sind die Permutationen $\pi_1 = (1\,2\,3\,4\,5)(6\,7\,8)$ und $\pi_2 = (1\,3\,6\,5\,4)(2\,7\,8)$ in A_8 konjugiert? Sind $\rho_1 = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)$ und $\rho_2 = (1\,2\,4\,3\,6\,5\,7)$ in A_8 konjugiert? Geben Sie jeweils eine konjugierende Permutation in A_8 an, wenn es eine solche gibt. Benutzen Sie ohne Beweis: $C_{S_8}(\pi_1) = \langle (1\,2\,3\,4\,5), (6\,7\,8) \rangle$ und $C_{S_8}(\rho_1) = \langle \rho_1 \rangle$.

Aufgabe 3. **(6 Punkte)**

Eine Spielwarenfabrik hat eine Maschine, die für ein seltsames Spiel Tetraeder als „Würfel“ baut. Leider hat die Maschine, die die Augen auf die Tetraeder malt, einen Programmfehler: seit ein Mechaniker damit „Tetris“ gespielt hat, malt sie auf jede Tetraederseite zufällig eine Augenzahl von eins bis vier, anstatt darauf zu achten, daß jede Augenzahl nur einmal vorkommt. Wieviele verschieden Typen von unbrauchbaren Würfeln gibt es?

Aufgabe 4. **(3 Punkte)**

Zeigen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung 84 einen echten Normalteiler hat.

Aufgabe 5. **(4 Punkte)**

Es sei (Ω, G) eine transitive Gruppe mit Operationsbereich. Dann ist $(\Omega \times \Omega, G)$ vermittels $(x, y)^g := (x^g, y^g)$ für $x, y \in \Omega$ und $g \in G$ ebenfalls eine Gruppe mit Operationsbereich. Ist $(\Omega \times \Omega, G)$ transitiv?

Aufgabe 6. **(3 Punkte)**

Geben Sie eine Kompositionsreihe und eine Hauptreihe für A_4 und S_4 an.

Aufgabe 7. **(5 Punkte)**

Es sei $F = \mathcal{V}_{3\times 1}(\mathbb{Z})$ und $N = \left\langle \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \right\rangle$. Bestimmen Sie den Isomorphietyp von F/N.

Aufgabe 8. **(3 Punkte)**
Geben Sie Polynome f und g in $\mathbb{Z}[X]$ an, so daß $(X^3 + X^2 + X + 1) = f \cdot (X^6 + X^4 - X^2 - 1) + g \cdot (X^5 + X^3 + X^2 + 1)$ gilt.

Aufgabe 9. **(4 Punkte)**
Es sei $G = \langle a, b, c \parallel a^2 = b^2 = [a,b]^2 = c^7 = 1, a^c = b, b^c = ab \rangle$. Zeigen Sie: $|G| \leq 28$.

Aufgabe 10. **(2 Punkte)**
Es sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie die *Kürzungsregel:* sind $a, b, c \in R$ und ist $ac = bc$, so folgt $a = b$, falls $c \neq 0$.

Aufgabe 11. **(1+2+1 Punkte)**
Zeigen Sie, daß folgende Polynome irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ sind:
a) $X^3 + 5X^2 + 4X + 1$
b) $X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X - 4$
c) $X^3 + 6X^2 + 4X + 2$

Aufgabe 12. **(6 Punkte)**
Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(-1) = 1$, $f(0) = -1$ und $f(1) = 0$.
Hinweis: Schreiben sie die Bedingung als Kongruenzgleichung in $Q[X]$: $f \equiv 1 \pmod{X + 1}$ etc. ...

Aufgabe 13. **(8 Punkte)**
Konstruieren Sie einen Körper mit neun Elementen, und geben Sie zu jedem Element das Minimalpolynom über dem Primkörper an.

Aufgabe 14. **(4 Punkte)**
Zeigen Sie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$.