# Klausur zur Algebra I (WS 90/91)

Prof. Dr. Schoenwaelder

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt sofort Ihren Namen. Schreiben Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

**Hinweis:** Holen Sie Ihre Klausuren bitte ab! Nicht abgeholte Klausuren werden bis zum Ende des Sommersemesters am Lehrstuhl aufbewahrt, danach werden sie vernichtet.

**Aufgabe 1.** **(2 Punkte)**

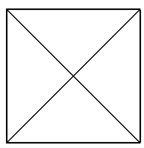
Es sei $G$ eine endliche Gruppe und $|G|$ eine gerade Zahl. Zeigen Sie: in $G$ gibt es ein Element $x \neq 1$ mit $x^2 = 1$.

**Aufgabe 2.** **(5 Punkte)**

Bestimmen Sie für $\pi = (1\,2\,5)(4\,7) \in S_7$ den Zentralisator. Beweisen Sie, daß die von Ihnen gefundene Gruppe der ganze Zentralisator ist.

**Aufgabe 3.** **(5 Punkte)**

Aus vier gleichschenkligen Dreiecken aus gefärbtem Glas wird ein Quadrat wie folgt zusammengeklebt.



Es stehen drei verschiedene Glasfarben zur Verfügung. Wieviele „im Prinzip“ verschiedene Quadrate gibt es?

**Hinweis:** Was bedeutet die Transparenz von Glas für die mathematische Modellbildung?

**Aufgabe 4.** **(3 Punkte)**

Zeigen Sie: eine Gruppe der Ordnung 1991 hat einen echten Normalteiler.

**Hinweis:** (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229) ist eine Liste von Primzahlen.

**Aufgabe 5.** **(5 Punkte)**

Zeigen Sie: Für $n \geq 5$ hat $S_n$ keine Untergruppe $U$ mit $2 < [G : U] < n$.

**Aufgabe 6.** **(3 Punkte)**
Es sei $(\Omega, G)$ eine transitive Permutationsgruppe, und außerdem sei $G$ kommutativ. Zeigen Sie: der Stabilisator $G_x$ eines Punktes $x \in \Omega$ besteht nur aus der 1.

**Aufgabe 7.** **(4 Punkte)**
Geben Sie jeweils eine Kompositionsreihe für die Gruppen $D_8$ und $S_n$, $n \geq 5$, an.

**Aufgabe 8.** **(5 Punkte)**
Es sei $F = \mathcal{V}_{3\times 1}(\mathbb{Z})$ und $N = \left\langle \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$. Bestimmen Sie den Isomorphietyp von $F/N$.

**Aufgabe 9.** **(3 Punkte)**
Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(X^4 + X^2 + 1, X^3 + 1)$ in $\mathbb{Q}[X]$, und schreiben Sie diesen als Linearkombination von $X^4 + X^2 + 1$ und $X^3 + 1$.

**Aufgabe 10.** **(4 Punkte)**
Bestimmen Sie die Ordnung und den Isomorphietyp von $G = \langle a, b, c \ \parallel \ a^4 = b^3 = c^2 = 1, b^c = a \rangle$.
**Hinweis:** Erst denken, dann rechnen!

**Aufgabe 11.** **(3 Punkte)**
Es sei $R$ ein Integritätsbereich und $I = (a) \trianglelefteq R$. Zeigen Sie: $(a^{i+1})$ ist eine echte Teilmenge von $(a^i)$, falls $(a) \neq R$ und $a \neq 0$.

**Aufgabe 12.** **(3+3 Punkte)**
Es sei $R = \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ mit $\theta = i\sqrt{11} \in \mathbb{C}$.
a) Zeigen Sie, daß $2 + \theta$ unzerlegbar ist.
b) Geben Sie den Isomorphietyp der abelschen Gruppe $(R/(3, 2+\theta), +)$ an.