Nachholklausur zur Vorlesung Algebra I (WS 97/98)

Prof. Dr. U. Schoenwaelder

Von den 11 folgenden Aufgaben dürfen Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Insgesamt sind 60 Punkte erreichbar, zum Bestehen der Klausur sind 25 Punkte notwendig. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt und geben Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an. **Hilfsmittel sind nicht erlaubt.** Bitte beachten Sie, daß **Begründungen** einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Es sei G eine endliche Gruppe.
a) Es sei $\iota := (x \mapsto x^{-1})\colon G \to G$. Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung an G dafür an, daß ι ein Gruppenautomorphismus ist. *2 Punkte*
b) Es seien $x, y \in G$. Man zeige: xy und yx haben gleiche Ordnung. *2 Punkte*
c) Man zeige: Gilt $x^2 = 1$ für alle $x \in G$, so ist G abelsch. *2 Punkte*

Aufgabe 2.
a) Es seien p und q verschiedene Primzahlen. Wieviele Isomorphietypen abelscher Gruppen der Ordnung p^3q^4 gibt es? (Begründung!) *2 Punkte*
b) Man bestimme bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 99. *2 Punkte*

Aufgabe 3.
Es sei G eine endliche Gruppe, die eine Untergruppe vom Index 4 besitzt. Man zeige: G besitzt einen Normalteiler vom Index 2 oder 3. *3 Punkte*

Aufgabe 4.
Es seien $k \in \mathbb{N}$ und p eine ungerade Primzahl.
a) Man gebe ein Erzeugendensystem für eine zur Diedergruppe D_{2p} isomorphe Untergruppe G der symmetrischen Gruppe S_p auf p Punkten an. *2 Punkte*
b) Was ist eine *Färbung* der p Punkte mit k Farben? Wie operiert G von rechts auf der Menge aller Färbungen der p Punkte? (Definition und Nachweis der Operationseigenschaft!) Wann heißen zwei Färbungen *vom gleichen Typ*? *3 Punkte*
c) Man ermittle eine Formel für die Anzahl der Typen von Färbungen der p Punkte mit k Farben. Daraus folgere man die Kongruenz $k^p \equiv k \pmod{p}$. *3 Punkte*

Aufgabe 5.
a) Man gebe eine formale Definition des Begriffs *Integritätsbereich* an. *2 Punkte*
b) Man zeige: Jeder endliche Integritätsbereich ist ein Körper. *2 Punkte*

Aufgabe 6.
a) Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, eine quadratische ganzzahlige Matrix und A' ihre Smith-Normalform. Wie hängen $\det(A)$ und $\det(A')$ zusammen? Was hat $\det(A)$ mit der Ordnung der durch die Zeilen von A definierten Faktorgruppe M von $\mathbb{Z}^{1\times n}$ zu tun? *3 Punkte*
b) Für

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$$

bestimme man die Ordnung von M und die Ordnung des durch $v := [1, 0, 0] \in \mathbb{Z}^{1\times n}$ definierten Elements von M. *3 Punkte*

Aufgabe 7.
Für $q, a, b \in \mathbb{N}$, $q > 1$ zeige man: Es ist $q^a - 1$ genau dann ein Teiler von $q^b - 1$, wenn a ein Teiler von b ist.
Hinweis. Man teile zunächst jeweils mit Rest. *3 Punkte*
b) Für den Fall, daß q eine Primzahlpotenz ist, gebe man einen alternativen Beweis der Aussage in a) mit Hilfe von Sätzen aus der Theorie endlicher Körper an. *3 Punkte*

Aufgabe 8.
Es seien $\omega := \sqrt{-5} \in \mathbb{C}$, $R := \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ und $K := \mathbb{Q}(\omega)$.
a) Ist R ein Gaußscher Bereich? Welche der Körperautomorphismen von K lassen den Teilring R invariant? *3 Punkte*
b) Man bestimme maximale Ideale $I_1, I_2 \lhd R$, so daß $3R = I_1 \cdot I_2$ gilt. *3 Punkte*
c) Man zeige, daß $R/3R$ als Ring-mit-1 isomorph zum äußeren direkten Produkt $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ist, und gebe eine entsprechende innere direkte Zerlegung von $R/3R$ an. *4 Punkte*

Aufgabe 9.
Wieviele Unterkörper hat ein Körper mit 81 Elementen? (Begründung!) *1 Punkt*

Aufgabe 10.
Man gebe Teilkörper $\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}(\beta) \subset \mathbb{C}$ für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\beta)$, jedoch $\mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}(\beta)$, für die Fälle
a) $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] < \infty$ bzw. *2 Punkte*
b) $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \infty$ an. *1 Punkt*

Aufgabe 11.
Es seien $\omega := \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ und $K := \mathbb{Q}(\omega) \subset \mathbb{C}$.
a) Man bestimme das Minimalpolynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ von ω über $\mathbb{Q}$, den Körpergrad $[K : \mathbb{Q}]$ und explizit die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(K : \mathbb{Q})$. *3 Punkte*
b) Es sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von f. Man bestimme explizit die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$ und ihren Isomorphietyp sowie den Körpergrad $[L : \mathbb{Q}]$. *3 Punkte*
c) Man gebe Erzeuger für alle Unterkörper von L an. (Begründung!) *3 Punkte*