Klausur zur Vorlesung Algebra I (WS 97/98)

Prof. Dr. U. Schoenwaelder

Von den 10 folgenden Aufgaben dürfen Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Insgesamt sind 70 Punkte erreichbar, zum Bestehen der Klausur sind 25 Punkte notwendig. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt und geben Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an. **Hilfsmittel sind nicht erlaubt.** Bitte beachten Sie, daß **Begründungen** einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Für eine endliche Gruppe G betrachte man die Abbildung $q := (x \mapsto x^2)\colon G \to G$.
a) Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung an G dafür an, daß q ein Homomorphismus ist. *2 Punkte*
b) Für eine zyklische Gruppe G bestimme man $|\mathrm{Kern}(q)|$ und $[G : \mathrm{Bild}(q)]$. Wann tritt welcher Fall ein? *3 Punkte*
c) Für eine Primzahl $p \neq 2$ betrachte man die Einheitengruppe $G := E(\mathbb{Z}_p)$ des Körpers $\mathbb{Z}_p$. Man zeige, daß $\mathrm{Bild}(q)$ mindestens eines der Elemente $\overline{-2}$, $\overline{-1}$, $\overline{2}$ enthält. *3 Punkte*

Aufgabe 2.
Wieviele Untergruppen der Ordnung 9 haben die folgenden abelschen Gruppen?
a) $G := \mathbb{Z}_9 \dot{+} \mathbb{Z}_3$, *3 Punkte*
b) $H := \mathbb{Z}_9 \dot{+} \mathbb{Z}_2$. *2 Punkte*

Aufgabe 3.
Es seien G eine endliche Gruppe, $N \trianglelefteq G$ und $P \leq N$ eine Sylow-p-Untergruppe von N.
a) Man zeige, daß $G = N \cdot N_G(P)$ gilt. *4 Punkte*
Hinweis. Man betrachte $g^{-1}Pg \leq G$ für $g \in G$.
b) Man gebe ein Beispiel für G, N und $N_G(P)$ an, in dem N und $N_G(P)$ echte Untergruppen von G sind. *3 Punkte*

Aufgabe 4.
Man zeige, daß jede Gruppe der Ordnung 1998 nicht einfach ist. *3 Punkte*

Aufgabe 5.
Man zeige, daß jede endliche Gruppe der Ordnung $2^n \cdot 5$, $n \in \mathbb{N}$, nicht einfach ist. Dazu unterscheide man die Fälle
a) $n \leq 3$ und *2 Punkte*
b) $n \geq 4$. *4 Punkte*
Hinweis. Man betrachte die Operation von G auf den Nebenklassen einer geeigneten Sylow-Untergruppe.

Aufgabe 6.
Es sei $R \neq \{0\}$ ein Integritätsbereich mit höchstens endlich vielen verschiedenen Idealen. Man zeige, daß R ein Körper ist. *3 Punkte*
Hinweis. Für $a \in R$ betrachte man die Folge $(a^n R \trianglelefteq R | n \in \mathbb{N})$ von Idealen.

Aufgabe 7.
a) Man gebe eine formale Definition des Begriffes *Einheit* an. *2 Punkte*
b) Ist $10 = 2 \cdot 5 = (3+i) \cdot (3-i) \in \mathbb{Z} + i \cdot \mathbb{Z}$ ein Beispiel einer nicht-eindeutigen Faktorisierung im Sinne der Definition eines *Gaußschen Bereichs*? *3 Punkte*

Aufgabe 8.
Es seien $R := \mathbb{Z} + \sqrt{-5} \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ und $\alpha := 1 + \sqrt{-5} \in R$.
a) Lassen alle Körperautomorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ den Teilring R invariant? *3 Punkte*
b) Man zeige, daß α in R unzerlegbar, aber nicht prim ist. *4 Punkte*
c) Ist R ein Gaußscher Bereich? *1 Punkt*
d) Es sei $P := 2R + \alpha R \trianglelefteq R$. Man bestimme den Restklassenring R/P und insbesondere $|R/P|$. Ist P ein maximales Ideal von R? *4 Punkte*
e) Ist P ein Hauptideal? *4 Punkte*

Aufgabe 9.
Es sei K ein Körper.
a) Es sei $K \leq K(a)$ eine algebraische Körpererweiterung mit ungeradem Grad $[K(a) : K]$. Man zeige, daß $K(a^2) = K(a)$ gilt. *2 Punkte*
b) Es sei $K \leq L$ eine algebraische Körpererweiterung, so daß $[L : K]$ eine Primzahl ist. Man zeige, daß $K(b) = L$ für alle $b \in L \setminus K$ gilt. *2 Punkte*

Aufgabe 10.
Es seien $f := X^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und $\zeta \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f.
a) Man zeige, daß f in $\mathbb{Q}[X]$ unzerlegbar ist. *2 Punkte*
b) Man gebe $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ an. Man zeige, daß $\mathbb{Q}(\zeta)$ ein Zerfällungskörper von f ist, und man gebe die Faktorisierung von f über $\mathbb{Q}(\zeta)$ an. *3 Punkte*
c) Man bestimme den Isomorphietyp der Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q})$. *4 Punkte*
d) Man gebe einen Erzeuger eines echten Zwischenkörpers $\mathbb{Q} < L < \mathbb{Q}(\zeta)$ an. *4 Punkte*