Nachholklausur zur Algebra I (6. 4. 00)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jeder Seite nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Von den 10 gegebenen Aufgaben für insgesamt 66 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 25 Punkte notwendig. Beachten Sie, dass ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden, und achten Sie bei Beweisen auf die Vollständigkeit Ihrer Argumentation.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

In $\mathbb{Q}[X]$ betrachten wir das Polynom $f = X^3 + 2X^2 - 2$, das Ideal $I = f\,\mathbb{Q}[X]$, den Faktorring $R = \mathbb{Q}[X]/I$ sowie die Restklasse $\alpha = (2X^2 - 2) + I$.

(a) Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

(b) Berechnen Sie das Körperelement α^{-1}. *6 Punkte*

Aufgabe 2.

(a) Ist das Polynom $f = X^9 + \frac{9}{2}X^2 - 18X + 105$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$?

(b) Ist das Polynom $g = X^3 + 7X^2 - 18X + 105$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$?

Es kommt jeweils auf die (Vollständigkeit der) Begründung an. *5 Punkte*

Aufgabe 3.

(a) Berechnen Sie die Einheiten des (euklidischen) Integritätsbereiches $\mathbb{Z}[i]$. (Beweis.)

(b) Ist die Zahl $2 - 3i$ prim in $\mathbb{Z}[i]$? (Begründung.) *8 Punkte*

Aufgabe 4.

In einem Körper L seien ein Teilkörper $K \leq L$ und ein Element $\alpha \in L$ gegeben, so dass $[K(\alpha) : K] \in \mathbb{N}$ ungerade ist. Zeigen Sie: $K(\alpha) = K(\alpha^2)$. *5 Punkte*

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) den kleinsten endlichen Körper, in dem die Gleichung $X^{13} - 1 = 0$ eine Lösung $\neq 1$ hat. (Die Argumentation ist wichtig.) *6 Punkte*

Aufgabe 6.

(a) Schreiben Sie die drei Nullstellen in $\mathbb{C}$ von $X^3 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $i = \sqrt{-1}$.

(b) Geben Sie ein Erzeugendensystem des Zerfällungskörpers $M \leq \mathbb{C}$ von $X^3 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$ als $\mathbb{Q}$-Algebra an.

(c) Geben Sie alle $\mathbb{Q}$-Algebra-Automorphismen von M an, indem Sie jeweils die Bilder Ihrer Erzeugenden angeben. *11 Punkte*

Aufgabe 7.
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 24 & 46 \\ 28 & 48 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$.

(a) Berechnen Sie Matrizen S und T aus $GL(2,\mathbb{Z})$, so dass $\tilde{A} = S\,A\,T$ in Smith-Normalform ist.

(b) Geben Sie $\tilde{A}$ sowie die invarianten Faktoren und die Elementarteiler von A an. *7 Punkte*

Aufgabe 8.
Im $\mathbb{Z}$-Modul $R = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$ ist der Teilmodul $I = 2\,\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$ gegeben. Wie viele Elemente hat der Faktormodul R/I? (Begründung.) *4 Punkte*

Aufgabe 9.

(a) Wie viele paarweise nicht isomorphe abelsche Gruppen der Ordnung 6 gibt es? (Beweis.)

(b) Geben Sie eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 6 an. (Beweis.) *6 Punkte*

Aufgabe 10.
Gegeben sei eine zyklische Gruppe $G = \langle g \rangle$ der Ordnung 2200 mit den Elementen $a = g^{11}$ und $b = g^{70}$.

(a) Zeigen Sie, dass weder das Element a noch das Element b die Gruppe G erzeugt.

(b) Zeigen Sie, dass das Element ab die Gruppe G erzeugt, indem Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ berechnen, für die $(ab)^n = g$ gilt. (Erläutern Sie Ihre Rechnung.) *8 Punkte*