

NAME _____

MATRIKELNUMMER _____

STUDIENGANG: Mathe-Bachelor Mathe-Master Lehramt/Sonstige

Prof. Dr. Eva Zerz

WS 2012/13

Algebra¹ – Klausur am 20.2.2013
Gruppe A

- Für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden
- Name, Matrikelnummer, Aufgabennummer auf jedes Blatt
- Nicht mit Rot schreiben
- Es gibt **5 Aufgaben** und insgesamt **100 Punkte**

Aufgabe	Punkte	
1	20	
2	20	
3	20	
4	20	
5	20	

Viel Erfolg!

1. (10+10 Pkt)

- (a) Sei G eine Gruppe der Ordnung 56. Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.
- (b) Sei G eine Gruppe der Ordnung 81 mit Nilpotenzgrad 3.
Sei $Z(G)$ das Zentrum von G , und G' die Kommutatorgruppe von G .
Zeigen Sie, dass $|Z(G)| = 3$ und $|G'| = 9$.

2. (4+4+2+10 Pkt)

Sei K ein endlicher Körper mit $|K| = q$, sei $0 \neq c \in K$, und $f = x^{q-1} - c \in K[x]$.
Sei L der Zerfällungskörper von f , und $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f .
Mit $\text{Aut}(L)$ sei die Automorphismengruppe von L bezeichnet.
Mit f' sei die formale Ableitung von f bezeichnet. Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $\text{ggT}(f, f') = 1$.
- (b) Die Menge der Nullstellen von f in L ist durch $\{k\alpha \mid 0 \neq k \in K\}$ gegeben.
- (c) Es gilt $L = K(\alpha)$.
- (d) Sei nun $q = 5$ und $c = 2 \in K = \mathbb{F}_5$.
 - i. Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist.
 - ii. Bestimmen Sie den Isomorphietyp von $\text{Aut}(L)$.
 - iii. Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $K \subsetneq M \subsetneq L$.

¹Es wird noch einmal daran erinnert, dass jeder Rechen- und Beweisschritt in angemessener Ausführlichkeit begründet werden muss. Punkte gibt es nur für nachvollziehbare Ergebnisse oder Schlüsse!

3. (2+4+4+4+6 Pkt)

Sei L der Zerfällungskörper von $f = x^5 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$.

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass f irreduzibel ist.

- (a) Zeigen Sie: Es gilt $L = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}, e^{2\pi i/5})$.
- (b) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}}(L)$.
- (c) Zeigen Sie: L enthält einen Körper M mit $\dim_{\mathbb{Q}}(M) = 4$, der über \mathbb{Q} Galois'sch ist.
- (d) Zeigen Sie: Der Körper aus (c) ist eindeutig bestimmt.
- (e) Betrachten Sie nun $f = x^5 - 3 \in \mathbb{F}_{11}[x]$. Mit L sei wieder der Zerfällungskörper von f bezeichnet. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass f irreduzibel ist. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{F}_{11}}(L)$ und alle Automorphismen von L .

4. (4+4+4+4+4 Pkt)

Sei R ein links Artinscher Ring mit Jacobson-Radikal $J(R)$. Zeigen Sie:

- (a) R ist Dedekind-endlich.
- (b) Ist $r \in R$ kein Rechtsnullteiler, so ist r eine Einheit.
- (c) Ist $r \in J(R)$, so ist r nilpotent.

Sei nun $R = \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ und I das von $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ erzeugte Linksideal in R .

- (d) Bestimmen Sie ein Linksideal J in R mit $I \oplus J = R$.
- (e) Geben Sie einen idempotenten Erzeuger von I an.

5. (4+4+4+4+4 Pkt)

Sei K ein kommutativer Körper und H der Ring der Quaternionen über K .

Seien $a, b, c, d \in K$ und $z = a + bi + cj + dk \in H$.

Sei $\bar{z} := a - bi - cj - dk \in H$ und $n := a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in K$.

- (a) Zeigen Sie, dass $z^2 - 2az + n = 0$.
- (b) Folgern Sie: Ist $n = 0$, so ist z ein Rechts- und Linksnulleiter in H .
Ist $n \neq 0$, so ist z eine Einheit in H mit Inverser $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{n}$.
- (c) Zeigen Sie, dass H Dedekind-endlich ist.

Sei nun $K = \mathbb{F}_3$.

- (d) Bestimmen Sie alle $z \in H$ mit $z^2 = 0$.
- (e) Wie viele Einheiten enthält H ?