Aufgabenblatt (Gesamtpunktzahl: 50) 06.02.2010 (1. Termin)

Klausur zu "Diskrete Strukturen", WS 09/10

B.Sc-Modulprüfung / Scheinklausur

Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ____________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Aufgabe 1. (8 Punkte)

Gegeben ist die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Schreiben Sie π als Produkt von disjunkten Zykeln. (3 P.)

b) Berechnen Sie das Signum von π. (2 P.)

c) Geben Sie σ so an, dass $(2,5)(4,6) \circ \sigma \circ (3,5)(7,8) = \pi$ gilt. (3 P.)

Probehinweis: Die Lösung σ lässt sich als einzelner Zykel schreiben.

$\pi =$ $\boxed{}$ $\mathrm{sgn}(\pi) =$ $\boxed{}$ $\sigma =$ $\boxed{}$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

a) Berechnen Sie $d = \mathrm{ggT}(784, 602)$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda \cdot 784 + \mu \cdot 602 = d$. (3 P.)

b) Geben Sie in $\mathbb{Z}_{784}$ eine Lösung von $x \cdot \overline{602} = \overline{308}$ an. (2 P.)

c) Bestimmen Sie alle Einheiten des Ringes $R = \mathbb{Z}_{30}$ und geben Sie zu jeder Einheit das inverse Element an. (4 P.)

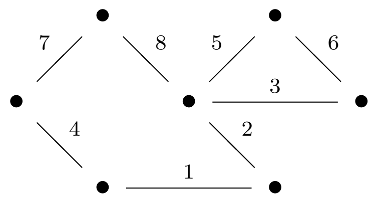
$d =$ $\boxed{}$ $\lambda =$ $\boxed{}$ $\mu =$ $\boxed{}$ $x =$ $\boxed{}$

$x \in R^*$	1	7	11	13	17	19	23	29
x^{-1}	1	13	11	7	23	19	17	29

alle x : $[498, 554, 610, 666, 722, 778, 50, 106, 162, 218, 274, 330, 386, 442]$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Betrachtet wird folgender Graph mit nummerierten Kanten:



a) Vervollständigen Sie $4, 7, \ldots$ zu einer Eulertour. (2 P.)

b) Auf wieviele Weisen ist dies möglich? (1 P.)

c) Wieviele Brücken enthält der Graph, wenn man die Kanten 7 und 8 entfernt? (2 P.)

d) Fassen Sie die Nummern als Gewichte auf und bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum. Tragen Sie unten die Kanten des Spannbaums in aufsteigender Nummerierung ein. (3 P.)

e) Wie lautet die maximale Komponentenzahl, die man durch Entfernen von zwei Kanten erreichen kann? (2 P.)

a)	4	7						
d)								

b) $\boxed{}$ c) $\boxed{}$ e) $\boxed{}$

□

Aufgabe 4. (8 Punkte)

Gegeben seien die Relationen

$$\begin{aligned}
A &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\} \text{ auf } \underline{4},\\
B &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,3),(2,3),(4,3)\} \text{ auf } \underline{4},\\
C &= \{(1,3),(1,4),(2,4),(3,1),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\} \text{ auf } \underline{4},\\
D &= \{(1,3),(1,4),(2,1),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2),(4,3)\} \text{ auf } \underline{4},\\
E &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(1,5),(2,5)\} \text{ auf } \underline{5},\\
F &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\} \text{ auf } \underline{5}.
\end{aligned}$$

a) Ordnen Sie die Relationen gemäß ihrer Eigenschaften so in die untenstehende Tabelle ein, dass jede Relation genau ein Mal vorkommt. Eine *Quasiordnung* ist eine Relation, die transitiv und reflexiv ist, aber nicht notwendigerweise antisymmetrisch. (5 P.)

b) Bestimen Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation. (1 P.)

c) Bestimen Sie alle Elemente, die bzgl. der partiellen Ordnung ein Minimum sind. Tragen Sie '—' ein, falls es keine gibt. (1 P.)

d) Bestimen Sie alle minimalen Elemente der Quasiordnung. Tragen Sie '—' ein, falls es keine gibt. (1 P.)

	A–F	
Totalordnung	A	—
partielle Ordnung	E	Minimum sind: —
Quasiordnung	B	minimal sind: 4
Äquivalenzrelation	F	Anzahl Klassen: 3
ungerichteter Graph ohne Schleifen	C	—
keins davon	D	—

Aufgabe 5. (9 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, wie es ohne Taschenrechner möglich ist.

a) Wieviele 6-stellige Dezimalzahlen gibt es, in denen keine zwei gleiche Ziffern hintereinander vorkommen? (3 P.)

b) Wieviele verschiedene Typen von Perlenketten lassen sich bilden, wenn man 6 paarweise verschieden gefärbte Perlen auf eine Schnur aufzieht? (3 P.)

c) Wieviele Wörter der Länge 7 lassen sich aus dem Buchstabenvorrat `BBBBLAAA` bilden? (3 P.)

a) ☐ b) ☐ c) ☐

Aufgabe 6. (schriftlich, 6 Punkte)

Geben eine geschlossene Formel für $S_{n,2}$ an, wobei $S_{n,k}$ die Stirling'sche Zahl zweiter Art bezeichnet. Leiten Sie Ihre Formel her bzw. begründen Sie sie ausführlich, **ohne** dabei die Rekursionsgleichung für die Stirling'schen Zahlen zu benutzen.