G. Nebe, M. Künzer 21.08.2006

Diskrete Strukturen, SS 06

Scheinklausur

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beliebig beschriebenes Blatt DIN A4 und ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner.

Es sind insgesamt 36 Punkte erreichbar.

Ist ein **Kasten** bei einer Frage, so bitte die Antwort in den Kasten. Die für diese Antwort benötigten Rechnungen gehen diesenfalls in die Bewertung nicht ein. Eine falsche Antwort gibt 0 Punkte (aber keine negativen Punkte).

Bitte zu jeder Bearbeitung einer Frage **ohne Kasten** deutlich die Aufgabennummer angeben.

Wer mehr Papier benötigt, bitte melden.

Aufgabe 1 **(1+2+2+1 Punkte)**

(1) Auf wieviele Arten kann man 4 Kugeln aus 4 Kugeln ziehen, wenn man jeweils wieder zurücklegt und nicht auf die Reihenfolge achtet? $\boxed{}$

(2) Bestimme die Ordnung des Elements $\big((1,3,2) \circ (1,4,3) \circ (1,3)\big)^2$ von $\mathcal{S}_4$. $\boxed{}$

(3) Seien 5 verschiedene Briefe in 5 verschiedene Briefumschläge zu stecken. Wieviele Möglichkeiten gibt es, keinen Brief in den richtigen Umschlag zu stecken? $\boxed{}$ (Hinweis: Permutationen, Fixpunkte.)

(4) Bestimme $\mu(91)$. $\boxed{}$

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Bestimme das Polynom $f(X) \in \mathbf{F}_2[X]$ von Grad < 6, welches folgenden Kongruenzen genügt, und trage es hier ein: $\boxed{}$. (Hinweis: Euklid.)

$$\begin{array}{lll} f(X) & \equiv_X & 1 \\ f(X) & \equiv_{X^2+X+1} & 1 \\ f(X) & \equiv_{X^3+X+1} & X^2 \end{array}$$

Aufgabe 3 **(4+2 Punkte)**

Sei $m \geq 1$. Sei A_m die Menge der Abbildungen von $\{1, \ldots, 6\}$ nach $\{1, \ldots, m\}$. Wir interpretieren A_m als die Menge der Perlenfärbungen der 6 Perlen einer Kette mit m möglichen Farben. Auf A_m operiere dementsprechend die Gruppe

$$G \;:=\; \langle a := (1,2,3,4,5,6),\, b := (2,6)(3,5) \rangle \;\leq\; \mathcal{S}_6$$

via $(g \cdot f)(x) := f(g^{-1}x)$, wobei $f \in A_m$, $g \in G$ und $x \in \{1, \ldots, 6\}$. Zwei Perlenfärbungen f und f' sind bis auf Perlenkettenbewegung als gleich anzusehen, falls sie in derselben G-Bahn von A_m liegen.

(1) Liste alle Elemente von G auf. (Hinweis: Eine Betrachtung von ${}^{b}a$ kann helfen.)

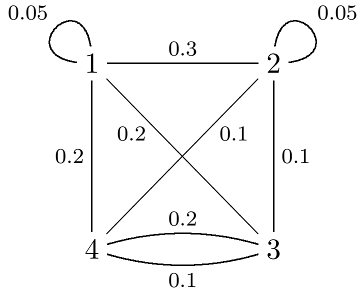
$\boxed{}$

$\boxed{}$

(2) Bestimme die Anzahl der G-Bahnen auf A_3, d.h. die Anzahl der auch nach Perlenkettenbewegung verschiedenen Perlenfärbungen mit 3 Farben. $\boxed{}$

Aufgabe 4 **(2 Punkte)**

Betrachte folgenden bewerteten Graphen $\mathcal{G}$.



Bestimme einen minimalen aufspannenden Teilgraphen. Trage diesen mit Farbe in $\mathcal{G}$ ein.

Aufgabe 5 **(2+2 Punkte)**

Sei C der lineare Code über $\mathbf{F}_2$ mit der Erzeugermatrix $\left(\begin{smallmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&1 \end{smallmatrix}\right)$. Sei C' der lineare Code über $\mathbf{F}_2$ mit der Erzeugermatrix $\left(\begin{smallmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&1 \end{smallmatrix}\right)$.

(1) Bestimme eine Erzeugermatrix von $(C|C')$.

(2) Bestimme den Minimalabstand von $(C|C')$.

Aufgabe 6 **(2+1 Punkte)**

Sei $f(X) = X^4 + X + \omega \in \mathbf{F}_4[X]$. Sei C der zyklische Code der Länge 15 mit Erzeugerpolynom $f(X)$. Betrachte $\mathbf{F}_4$ als Teilkörper von $\mathbf{F}_{16}$ vermöge $\omega \longmapsto \gamma^5 = \gamma^2 + \gamma$.

(1) Bestimme alle Nullstellen von $f(X)$ in $\mathbf{F}_{16}$ unter Verwendung der Tatsache, daß γ^9 und γ^{13} als Nullstellen bekannt sind.

(2) Bestimme den designierten Minimalabstand von C, d.h. die vermittels aufeinanderfolgender Potenzen einer primitiven 15-ten Einheitswurzel als Nullstellen von $f(X)$ bestimmbare untere Schranke für $d(C)$.

Aufgabe 7 **(4+2 Punkte)**

Sei C der Hammingcode mit den Parametern $q = 8$ und $r = 2$ in Standardbezeichnung.

(1) Bestimme eine Prüfmatrix und eine Erzeugermatrix von C.

(2) Vergleiche die Dimension von C mit der Singleton-Schranke im vorliegenden Fall, d.h. für Länge und Minimalabstand wie C.

Aufgabe 8 **(3 Punkte)**

Zeige oder widerlege die folgende Aussage.

Sei G eine endliche Gruppe. Ist p eine Primzahl, ist $k \geq 1$, und ist p^k ein Teiler von $|G|$, so gibt es in G ein Element von Ordnung p^k.