Klausur zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ SS 92

Aufgabe 1. **5 Punkte**
Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n, für die $13 \mid n+4$, $11 \mid n-3$ und $7 \mid n+2$ gilt.

Aufgabe 2. **2+2 Punkte**
(a) Wieviele nicht-isomorphe abelsche Gruppen der Ordnung 180 mit zwei (oder weniger) Erzeugern gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Wieviele nicht-isomorphe abelsche Gruppen der Ordnung 180 mit drei (oder weniger) Erzeugern gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3. **3 Punkte**
Es sei $I \subseteq \mathbf{Z}_2[x]$ das von x^3+x^2+1 und x^2+x+1 erzeugte Ideal in $\mathbf{Z}_2[x]$. Zeigen Sie, daß $I = \mathbf{Z}_2[x]$ gilt.

Aufgabe 4. **3+6 Punkte**
(a) Es seien zwei Polynome $f = x^5+x^4+x^3+1$ und $g = x^4+x^2+1$ aus $\mathbf{Z}_2[x]$ gegeben. Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler d von f und g sowie Polynome u und v aus $\mathbf{Z}_2[x]$, für die $d = u * f + v * g$ gilt.

(b) Es sei K ein Körper, f und g zwei Polynome aus $K[x]$ mit $\partial f > \partial g$ und $d \in ggT(f,g)$. Der erweiterte Euklidische Algorithmus liefert Polynome u und v aus $K[x]$ mit $d = u * f + v * g$. Zeigen Sie, daß für das Polynom u die Abschätzung $\partial u \leq \partial g - \partial d$ gilt. ∂h bezeichne dabei den Grad eines Polynoms h.
ANLEITUNG: Zeigen Sie zuerst, daß $\partial x_{i+1} < \partial x_{i+2}$ und $\partial r_i + \partial x_{i+1} = \partial g$ für $i \geq 0$ im erweiterten Euklidischen Algorithmus (bei Startwerten $r_0 = g$ und $r_{-1} = f$) gilt.

Aufgabe 5. **1+3 Punkte**
(a) Es sei φ die Eulersche φ-Funktion. Berechnen Sie $\varphi(81)$, $\varphi(25)$ und $\varphi(2025)$.

(b) Zeigen Sie: Aus $n \mid m$ folgt $\varphi(n) \mid \varphi(m)$.

Aufgabe 6. **4 Punkte**
Bestimmen Sie die ganzzahligen Lösungen $x \in \mathcal{V}_{3\times 1}(\mathbf{Z})$ der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & 12 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7. **3 Punkte**

Es sei P die Pyramide . Es sei M die Menge der Ecken, Kanten und Flächen sowie P und $\emptyset$. Dann ist $(M, \subseteq)$ eine verbandsgeordnete Menge. Bestimmen Sie die Eulercharakteristik des zugehörigen Verbandes.

Aufgabe 8. **3 Punkte**

Es sei $M = \{a, b, c, d, e\}$ und $\leq\ = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (c, e), (d, e)\}$ gegeben. Es sei $g : M \to \mathbf{N}$ eine Gewichtsfunktion. Bestimmen Sie aus den summierten Gewichten $f(x) = \sum_{d \leq x} g(d)$ mittels Möbiusinversion die ursprüngliche Gewichtsfunktion g. Dabei ist f gegeben durch $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 4$, $f(d) = 6$ und $f(e) = 12$.

Aufgabe 9. **2 Punkte**

Es sei O ein regelmäßiger Oktaeder. Es sei M die Menge der Ecken, Kanten und Flächen sowie O und $\emptyset$. Dann ist $(M, \subseteq)$ eine verbandsgeordnete Menge. Ist der zugehörige Verband ein Boolescher Verband?

Aufgabe 10. **2+8 Punkte**

(a) Es sei A eine freie Boolesche Algebra mit freiem Erzeugendensystem $\{x_1, x_2, x_3\}$. Bestimmen Sie die disjunktive Normalform des Elementes $(x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})$.

(b) Es sei B eine Boolesche Algebra mit freiem Erzeugendensystem $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Für $\epsilon \in \underline{2}^n = \{0, 1\}^n$ sei q_ϵ definiert als $x_1^{\epsilon_1} + \ldots + x_n^{\epsilon_n}$. Für eine Teilemenge I von $\underline{2}^n$ sei w_I definiert als $\prod_{\epsilon \in I} q_\epsilon$. Bestimmen Sie für w_I die disjunktive Normalform.
HINWEISE: DeMorgansche Regeln. Was ist $\overline{w_I}$?.

Aufgabe 11. **2+2+2+4 Punkte**

Es sei $\mathcal{A}$ die Klasse der abelschen Gruppen.

(a) Gibt es für $\mathbf{Z} \dot{+} \mathbf{Z}$ ein $\mathcal{A}$–freies Erzeugendensystem? Wenn ja, geben Sie eins an.

Es sei $M = \{(3, 11, 3, 19), (4, 13, 6, 23), (2, 4, 6, 8)\} \subset \mathcal{V}_{1\times 4}(\mathbf{Z})$. Weiter sei U die von M erzeugte Untergruppe.

(b) Zeigen Sie, daß M kein $\mathcal{A}$–freies Erzeugendensystem für U ist.

(c) Gibt es ein $\mathcal{A}$-freies Erzeugendensystem für U? Wenn ja, geben Sie es an!

(d) Ist die Faktorgruppe $\mathcal{V}_{1\times 4}(\mathbf{Z})/U$ $\mathcal{A}$-frei? Begründen Sie Ihr Antwort!

Aufgabe 12. **3+2 Punkte**

Das Ideal $I = (x^3 + x^2 + 1)\mathbf{Q}[x]$ von $\mathbf{Q}[x]$ kann als $\mathbf{Q}[X]$–Teilmodul und als $\mathbf{Q}$–Teilmodul von $\mathbf{Q}[X]$ aufgefaßt werden. Entsprechend ist $\mathbf{Q}[X]/I$ ein $\mathbf{Q}[x]$– oder $\mathbf{Q}$–Modul.

(a) Bestimmen Sie eine Basis für $\mathbf{Q}[X]/I$ als $\mathbf{Q}$–Modul.

(b) Bestimmen Sie ein unverkürzbares Erzeugendensystem für $\mathbf{Q}[X]/I$ als $\mathbf{Q}[x]$–Modul.

Aufgabe 13. **3+2 Punkte**

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_{3\times 3}(\mathbf{Q})$.

(b) Es sei s ein Element aus den reellen Zahlen $\mathbf{R}$ mit $s^2 = 2$ und $a = 1 + s$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von a über $\mathbf{Q}$.