Musterlösung für den "Diskrete Strukturen"-Teil der Vordiploms-Klausur Mathematik II für Informatiker (15.3.1999)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik, RWTH Aachen

Aufgabe 10. (8 Punkte)
Es seien $a_1, ..., a_n$ beliebige natürliche Zahlen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Zwei der Zahlen aus der Menge $N = \{0, a_1, a_1 + a_2, ..., a_1 + a_2 + ... + a_n\}$ ergeben bei Division durch n denselben Rest.

b) Es gibt zwei Zahlen $0 \leq k < l \leq n$, so daß $\sum_{i=k+1}^{l} a_i$ ein Vielfaches von n ist.

Lösung: zu a) Es gibt genau die n verschiedenen Reste $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$ bei Division durch n. Da nun $|N| = n + 1 > n$ folgt sofort nach dem 'Schubfachprinzip', daß zwei der Zahlen in N denselben Rest modulo n ergeben. Setzt man $a_0 = 0$, so gibt es zwei Zahlen $0 \leq k < l \leq n$, so daß die beiden Zahlen mit demselben Rest $\sum_{i=0}^{k} a_i$ und $\sum_{i=0}^{l} a_i$ sind.
zu b) Die Zahl $\sum_{i=k+1}^{l} a_i = \sum_{i=0}^{l} a_i - \sum_{i=0}^{k} a_i > 0$ hat den Rest 0 bei Division durch n und ist daher ein Vielfaches von n.

Aufgabe 11. (8 Punkte)
Es sei a_n für $n \in \mathbf{N}$ die Anzahl der Mengen $S \subseteq \{1, ..., n\}$ mit der Eigenschaft, daß $\{x, x+1 | \, x \in S\} = \{1, ..., n\}$ ist. Drücken Sie die Zahlen a_n für $n \in \mathbf{N}$ mit Hilfe der Fibonacci-Zahlen aus.
(Hinweis: Beweisen Sie eine Rekursion für die a_n.)

Lösung: Es gilt $a_1 = 0$, denn für $n = 0$ gibt es keine derartige Menge. Ferner $a_2 = 1$ und $a_3 = 1$, denn $\{1\}$ und $\{1, 2\}$ sind die einzigen derartigen Mengen. Es sei nun $\mathcal{S}_n$ für $n \geq 4$ die Menge aller Mengen mit der gewünschten Eigenschaft. Weiter sei

$$\mathcal{S}_n' = \{S \in \mathcal{S}_n | n-2 \in S\}$$

$$\mathcal{S}_n'' = \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{S}_n'.$$

Es gilt $n-3 \in S$ für alle $S \in \mathcal{S}''_n$.
Nun folgt $|\mathcal{S}'_n| = |\mathcal{S}_{n-1}|$, denn für jedes $S \in \mathcal{S}'_n$ ist $S - \{n-1\} \in \mathcal{S}_{n-1}$ und für jedes $S' \in \mathcal{S}_{n-1}$ ist $S' \cup \{n-1\} \in \mathcal{S}'_n$.
Weiter folgt $|\mathcal{S}''_n| = |\mathcal{S}_{n-2}|$, denn für jedes $S \in \mathcal{S}''_n$ ist $S - \{n-1\} \in \mathcal{S}_{n-2}$ und für jedes $S'' \in \mathcal{S}_{n-2}$ ist $S'' \cup \{n-1\} \in \mathcal{S}''_n$. Daher folgt

$$a_n = |\mathcal{S}_n| = |\mathcal{S}'_n| + |\mathcal{S}''_n| = |\mathcal{S}_{n-1}| + |\mathcal{S}_{n-2}| = a_{n-1} + a_{n-2},$$

d.h. die a_n genügen der Rekursion der Fibonaccizahlen $F_{n'}$ bei verschobenen Anfangsbedingungen ($a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $a_3 = 1$ statt $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_2 = 1$) und es folgt $a_n = F_{n-1}$ für $n \geq 1$.

Aufgabe 12. (8 Punkte)
Gegeben sei eine Folge von Graphen $(G_n)_{n\geq 1}$, so daß $G_1 = (\{v_1\}, \emptyset)$ und für $n \geq 2$ der Graph $G_n = (V_n, E_n)$ aus $G_{n-1} = (V_{n-1}, E_{n-1})$ entsteht, indem man zu V_{n-1} eine Ecke v_n hinzufügt und mit mehr als $\frac{n-1}{2}$ Ecken von G_{n-1} verbindet, d.h. $|N(v_n)| > \frac{n-1}{2}$.
Zeigen Sie, daß G_n für $n \geq 3$ hamiltonsch ist.

Lösung: (Induktion) Es gilt $G_1 = K_1$, $G_2 = K_2$ und $G_3 = K_3$, womit die Aussage für $n = 3$ richtig ist.
Es sei nun G_{n-1} hamiltonsch und O.B.d.A.

$$C = x_1 x_2 ... x_{n-1} x_1$$

ein Hamiltonkreis in G_{n-1}. Da $|N(v_n)| > \frac{n-1}{2}$, existiert ein Index $1 \leq i \leq n-1$ mit $x_i, x_{i+1} \in N(v_n)$ (Indizes modulo $(n-1)$). Daher ist

$$C' = x_1 x_2 ... x_i v_n x_{i+1} ... x_{n-1} x_1$$

ein Hamiltonkreis in G_n und die Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe 13. (9 Punkte)
Zeigen Sie, daß $P_{n,k}$ für $n, k \in \mathbf{N}$ die Anzahl der ungeordneten Zahlpartitionen

$$n + k^2 - k = n_1 + n_2 + ... + n_k$$

von $n + k^2 - k$ in genau k Summanden ist, für die $|n_i - n_j| \geq 2$ für alle $1 \leq i < j \leq k$ gilt.

Lösung: Es sei $\mathcal{P}_{n,k}$ die Menge aller ungeordneten k-Zahlpartitionen von n. Es sei weiter $\mathcal{P}'_{n,k}$ die Menge aller ungeordneten k-Zahlpartitionen

$$n = n_1 + n_2 + ... + n_k$$

von n mit $|n_i - n_j| \geq 2$ für alle $1 \leq i < j \leq k$.
Gegeben sei der Ferrergraph eines Elementes aus $\mathcal{P}_{n,k}$. O.B.d.A. enthalte die Zeile $i+1$ mehr Sterne als die Zeile i für $1 \leq i \leq k-1$. Fügt man nun für $1 \leq i \leq k$ in der i-ten Zeile jeweils $2(i-1)$ Sterne hinzu, dann erhält man ein Element aus $\mathcal{P}'_{n',k}$ mit

$$n' = n + \sum_{i=1}^{k} 2(i-1) = n + 2\sum_{i=1}^{k-1} i = n + 2\frac{k(k-1)}{2} = n + k^2 - k.$$

$$\begin{array}{lcl}
* & & * \\
* & & *** \\
** & & ******* \\
**** & \longrightarrow & *********** \\
**** & & ************* \\
***** & & **************** \\
\end{array}$$

Nun sei umgekehrt der Ferrergraph eines Elementes aus $\mathcal{P}'_{n',k}$ gegeben. O.B.d.A. enthalte wieder die Zeile $i+1$ mehr Sterne als die Zeile i für $1 \leq i \leq k-1$. Wegen der Definition von $\mathcal{P}'_{n',k}$ folgt sofort, daß für $1 \leq i \leq k$ die i-te Zeile mindestens $2(i-1)+1$ Sterne enthalten muß. Streicht man nun für $1 \leq i \leq k$ in der i-ten Zeile jeweils $2(i-1)$ Sterne, dann erhält man ein Element aus $\mathcal{P}_{n,k}$. Die Mengen $\mathcal{P}_{n,k}$ und $\mathcal{P}'_{n',k}$ stehen daher in Bijektion und es folgt

$$|\mathcal{P}'_{n',k}| = |\mathcal{P}'_{n+k^2-k,k}| = |\mathcal{P}_{n,k}| = P_{n,k}.$$

$$\begin{array}{lcl}
* & & * \\
* & & *** \\
** & & ******* \\
**** & \longleftarrow & *********** \\
**** & & ************* \\
***** & & **************** \\
\end{array}$$

Aufgabe 14. (7 Punkte)
Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ genüge der Rekursion $a_{n+4} + 3a_{n+3} + a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 8$, $a_1 = -8$ und $a_2 = 24$. Bestimmen Sie eine explizite Darstellung dieser Folge.

Lösung: Gemäß dem Satz über Rekursionen aus der Vorlesung gilt $q(z) = 1 + 3z + z^2 - 3z^3 - 2z^4$. Die Nullstellen $z = 1$ und $z = -1$ kann man leicht erraten. Damit ergibt sich $q(z) = 1+3z+z^2-3z^3-2z^4 = (1-z)(1+z)^2(1+2z)$ und daher $\alpha_1 = 1$, $d_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $d_2 = 2$ und $\alpha_3 = -2$, $d_3 = 1$. Daher genügt a_n dem Ansatz

$$a_n = a + (b + c \cdot n) \cdot (-1)^n + d \cdot (-2)^n.$$

Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich nun folgendes GLS für a, b, c und d.

$$\begin{array}{lllllll} a & +b & & +d & = & 8 \\ a & -b & -c & -2d & = & -8 \\ a & +b & +2c & +4d & = & 24 \\ a & -b & -3c & -8d & = & a_3. \end{array}$$

Dies hat die Lösung:

$$\begin{array}{lllll} a & & & & = & 6+\frac{a_3}{12} \\ & b & & & = & 10+\frac{a_3}{4} \\ & & c & & = & 20+\frac{a_3}{2} \\ & & & d & = & -8-\frac{a_3}{3} \end{array}$$

und damit gilt für $n \geq 0$

$$a_n = (6+\frac{a_3}{12}) + ((10+\frac{a_3}{4}) + (20+\frac{a_3}{2})\cdot n)\cdot(-1)^n + (-8-\frac{a_3}{3})\cdot(-2)^n.$$

Aufgabe 15. (12 Punkte)
Die Mengen $A_1, ..., A_n \subseteq \{1, ..., n\}$ mit $n \in \mathbf{N}$ bilden eine "*Kette*", falls $A_i \subseteq A_{i+1}$ und $A_i \neq A_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$ gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für jede Kette $A_1, ..., A_n$ gilt $|A_i| = i$ für $1 \leq i \leq n$ und es gibt genau $n!$ verschiedene Ketten.

b) Zu einer Menge $B \subseteq \{1, ..., n\}$ gibt es genau $|B|! \cdot (n - |B|)!$ verschiedene Ketten $A_1, ..., A_n$ mit $A_{|B|} = B$.

c) Gilt für die Mengen $B_1, ..., B_m \subseteq \{1, ..., n\}$, daß $B_i \not\subseteq B_j$ für $1 \leq i \neq j \leq m$, dann gilt
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|B_i|}} \leq 1.$$

Lösung: zu a) Es gilt $|A_i| < |A_{i+1}| \leq n$ für $1 \leq i \leq n-1$. Daraus folgt sofort $|A_i| = i$ für $1 \leq i \leq n$ und $A_n = \{1, ..., n\}$. Man kann nun alle Ketten bilden, indem man ausgehend von A_n sukzessive Elemente streicht. Für das i-te zu streichende Element hat man dabei jeweils genau $n-i+1$ Möglichkeiten für $1 \leq i \leq n-1$. Daher gibt es

$$\prod_{i=1}^{n-1} (n-i+1) = \prod_{i=2}^{n} i = n!$$

verschiedene Ketten.

zu b) Man erhält die Mengen $A_1, ..., A_{|B|-1}$ aller gewünschten Ketten, indem man ausgehend von $A_{|B|} = B$ sukzessive Elemente streicht. Dabei hat man wie oben $|B|!$ Möglichkeiten. Weiter erhält man die Mengen $A_{|B|+1}, ..., A_n$ aller gewünschten Ketten, indem man ausgehend von $A_{|B|} = B$ sukzessive Elemente hinzufügt. Analog ergibt sich, daß man dabei $(n - |B|)!$ Möglichkeiten hat. Insgesamt gibt es also $|B|! \cdot (n - |B|)!$ der gesuchten Ketten.

zu c) Da $B_i \not\subseteq B_j$ für $1 \leq i \neq j \leq m$ sind alle Ketten $A_1, ..., A_n$ mit $A_{|B_i|} = B_i$ verschieden von den Ketten $A'_1, ..., A'_n$ mit $A'_{|B_j|} = B_j$. Daher gilt nach den Teilen a) und b)

$$\sum_{i=1}^{m} |B_i|! \cdot (n - |B_i|)! \leq n! \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{|B_i|! \cdot (n - |B_i|)!}{n!} \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|B_i|}} \leq 1.$$

Aufgabe 16. (8 Punkte)
Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit den Partitionsmengen U und W mit $|U| = |W| = n$. Es sei $d(x, G) = |N(x, G)| \geq \frac{n}{2}$ für alle $x \in U \cup W$.
Zeigen Sie, daß G ein perfektes Matching besitzt.
(Hinweis: Betrachten Sie eine minimale Eckenüberdeckung.)

Lösung: Angenommen G habe kein perfektes Matching, dann gilt für eine minimale Eckenüberdeckung V' nach dem Satz von König, daß $|V'| < n$. Es gilt nun entweder $|V' \cap U| < \frac{n}{2}$ oder $|V' \cap W| < \frac{n}{2}$. O.B.d.A. Gelte $|V' \cap U| < \frac{n}{2}$. Weiter gilt $V' \cap W \neq \emptyset$. Sei $x \in V' \cap W$, dann enden alle Kanten, die von x ausgehen in $V' \cap U$ und es gilt

$$d(x, G) \leq |V' \cap U| < \frac{n}{2},$$

was der Voraussetzung widerspricht. Daher folgt die Behauptung.

Aufgabe 17. (8 Punkte)
Bestimmen Sie einen maximalen Fluß und einen minimalen Schnitt in dem Netzwerk $N = (V, B, q, s, c)$ mit

$$\begin{aligned} V &= \{q = 1, 2, 3, ..., 8, s = 9\}, \\ B &= \{(1,2), (1,5), (2,3), (2,6), (2,9), (3,4), (4,7), (5,4), \\ &\quad (5,7), (5,8), (6,3), (6,7), (7,9), (8,6), (8,9)\}, \end{aligned}$$

$c((1,2)) = 5$, $c((1,5)) = 10$, $c((2,3)) = 1$, $c((2,6)) = 2$, $c((2,9)) = 1$, $c((3,4)) = 2$, $c((4,7)) = 7$, $c((5,4)) = 5$, $c((5,7)) = 2$, $c((5,8)) = 3$, $c((6,3)) = 3$, $c((6,7)) = 1$, $c((7,9)) = 8$, $c((8,6)) = 2$ und $c((8,9)) = 1$.

Lösung: Die Funktion $f : B \to \mathbf{R}$ mit $f((1,2)) = 3$, $f((1,5)) = 7$, $f((2,3)) = 1$, $f((2,6)) = 1$, $f((2,9)) = 1$, $f((3,4)) = 2$, $f((4,7)) = 7$, $f((5,4)) = 5$, $f((5,7)) = 0$, $f((5,8)) = 2$, $f((6,3)) = 1$, $f((6,7)) = 1$, $f((7,9)) = 8$, $f((8,6)) = 1$ und $f((8,9)) = 1$ ist ein Fluß der Stärke 10 in N.
Die Menge $V - \{s = 9\}$ definiert einen Schnitt C der Kapazität $1 + 8 + 1 = 10$ in N.
Daher ist f maximal und C minimal.