Aufgabenblatt 1 (Lineare Algebra I) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (17. 9. 1998)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 1.
Beweisen Sie: Ist V ein 4-dimensionaler Vektorraum, so gibt es in V drei 2-dimensionale Untervektorräume, so daß die Summe von je zweien dieser Untervektorräume ganz V ist. (Es kommt auf eine klare Formulierung der logischen Zusammenhänge an.) *4 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei $K = \mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen, $A \in K^{2\times 5}$ und $b \in K^{2\times 1}$.

(a) Welche notwendige und hinreichende Bedingung müssen die Matrix A und die Spalte b erfüllen, damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau 8 Lösungen hat? (Antwort mit Beweis.)

(b) Wie viele verschiedene homogene lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen, 5 Unbekannten und genau 8 Lösungen gibt es über K? (Dabei bezeichnen wir zwei lineare Gleichungssysteme als verschieden, wenn die zugehörigen erweiterten Matrizen verschieden sind.)

(c) Wie viele verschiedene nicht homogene lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen, 5 Unbekannten und genau 8 Lösungen gibt es über K?

(Es kommt jeweils auf die sorgfältige Argumentation an.) *3 + 3 + 3 = 9 Punkte*

Aufgabe 3.
Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. In $K^{n\times n}$ seien symmetrische Matrizen A und B gegeben, d. h., es sei $A^t = A \in K^{n\times n}$ und $B^t = B \in K^{n\times n}$. Beweisen Sie: Die Matrix AB ist genau dann symmetrisch, wenn $AB = BA$ ist. *3 Punkte*

Aufgabe 4.
Invertieren Sie (mit dem Gauß-Algorithmus) die Matrix $A = \begin{bmatrix} -9 & 2 & -6 \\ 6 & -1 & 4 \\ 19 & -4 & 13 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

Sie brauchen dabei nicht anzugeben, welche elementaren Umformungen Sie benutzen, Sie müssen aber am Schluß die Matrix A^{-1} explizit angeben. Empfehlung: Vermeiden Sie bei der Rechnung Brüche. (Das Ergebnis ist ganzzahlig.) *4 Punkte*

Aufgabe 5.
Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ seien die Untervektorräume

$$U_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad U_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

gegeben. Berechnen Sie je eine Basis für $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

Erläutern Sie dabei den Ansatz Ihrer Rechnung, und geben Sie die Basen konkret an. *5 Punkte*

Aufgabenblatt 2 (Lineare Algebra I) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (17. 9. 1998)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 6.
Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Entwickeln Sie dabei $|A|$ und alle vorkommenden 3×3-Unterdeterminanten jeweils nach der letzten Zeile. (Also keine vorherigen elementaren Umformungen, Entwicklung nach anderen Zeilen oder Spalten oder Anwendung der Regel von Sarruss.) *3 Punkte*

Aufgabe 7.
Es seien $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f = X^5 - 4X^4 + 4X^3 + X^2 - 9X - 6$ und $g = X^2 - 2X - 3$.

(a) Dividieren Sie f mit Rest durch g. (Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.)

(b) Berechnen Sie $g(A)$ und $f(A)$ für $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$. *4 + 3 = 7 Punkte*

Für die Aufgaben 8 und 9 nehmen wir an, es sei V der Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit der Standardbasis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$, und es sei $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in V$.
Weiter sei eine Abbildung $\varphi\colon V \to V$ definiert durch $\varphi(v) = Tv$ für alle $v \in V$.

Aufgabe 8.

(a) Zeigen Sie, daß φ linear ist.

(b) Beweisen Sie, ohne die betreffenden Polynome zu berechnen: Die charakteristischen Polynome von T und φ sind verschieden, aber ihre Minimalpolynome sind gleich. Bestimmen Sie dazu der Reihe nach die Grade der Polynome χ_T, χ_φ, μ_T, μ_φ. (Die Begründungen sind wichtig.)

(c) Zeigen Sie, daß φ ein Automorphismus von V ist. *2 + 5 + 2 = 9 Punkte*

Aufgabe 9.

(a) Nach Aufgabe 8 ist φ linear. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von φ und ihre algebraischen Vielfachheiten.

(c) Berechnen Sie die Eigenräume von φ. (Achtung: Das müssen Untervektorräume von V sein.)

(d) Berechnen Sie eine Basis $\mathcal{C}$ von V, die aus Eigenvektoren von φ besteht, und geben Sie $\mathcal{C}$, die Basiswechselmatrix $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$ und die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C}}(\varphi)$ an.

3 + 4 + 4 + 3 = 14 Punkte

Aufgabenblatt 3 (Diskrete Strukturen) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (17. 9. 1998)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 10.
Es sei $a \geq 1$ eine natürliche Zahl. Drücken Sie die Anzahl der ungeordneten k-Zahlpartitionen $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ mit $n_i \geq a$ für $1 \leq i \leq k$ durch die Partitionszahlen $P_{n',k'}$ aus.

7 Punkte

Aufgabe 11.
Zeigen Sie, daß die Anzahl der ungeordneten k-Zahlpartitionen $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ mit $n_i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ für $1 \leq i \leq k$ folgenden Wert hat:

$$P_{n,k} - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - j, k-1}.$$

9 Punkte

Aufgabe 12.
Bestimmen Sie in folgendem Netzwerk $N = (V, B, q, s, c)$ einen maximalen Fluß:

$$V = \{x_1, ..., x_9\} \cup \{q, s\},$$

$$B = \{(q, x_i), (x_i, s) | 1 \leq i \leq 9\} \cup \{(x_{i+1}, x_i) | 1 \leq i \leq 8\},$$

$c((q, x_i)) = i$, $c((x_i, s)) = 10 - i$ für $1 \leq i \leq 9$ und $c((x_{i+1}, x_i)) = 9 - i$ für $1 \leq i \leq 8$.

10 Punkte

Aufgabe 13.
Es sei T ein Baum mit zwei nicht adjazenten Ecken vom Grad $d \geq 3$. Zeigen Sie, daß T mindestens $2d - 2$ Endecken besitzt.

9 Punkte

Aufgabe 14.
Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ genüge der Rekursion $a_{n+1} + a_{n+2} = 2a_n$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 3$ und $a_1 = 0$. Bestimmen Sie eine explizite Darstellung dieser Folge.

7 Punkte

Aufgabenblatt 4 (Diskrete Strukturen) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (17. 9. 1998)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 15.
Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $a_n = 3 + (-2)^n$. Welche Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ hat die erzeugende Funktion

$$g(z) = \frac{f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})}{2}?$$

(Hinweis: Versuchen Sie es nach Möglichkeit zu vermeiden, die Funktionen f und g explizit zu berechnen.)

10 Punkte

Aufgabe 16.
Die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ genüge der Rekursion

$$c_{n+3} + 3 \cdot 10 \cdot c_{n+2} + 3 \cdot 100 \cdot c_{n+1} + 1000 \cdot c_n = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $c_0 = 0$, $c_1 = -10$, $c_2 = 200$ und $c_4 = 40000$.
Bestimmen Sie eine explizite Darstellung dieser Folge. (Beachten Sie, daß c_3 nicht gegeben ist).

9 Punkte

Aufgabe 17.
Zeigen Sie, daß ein Graph G genau dann bipartit ist, wenn für alle seine Teilgraphen H eine Menge $V_H \subseteq V(H)$ mit $|V_H| \geq \frac{|V(H)|}{2}$ existiert, so daß keine zwei Ecken aus V_H in H adjazent sind.
(Hinweis: Betrachten Sie einen Kreis ungerader Länge.)

9 Punkte
