

Aufgabenblatt 1 (Lineare Algebra I) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte
Mathematik, RWTH Aachen

Aufgabe 1.

- (a) Geben Sie ein Beispiel V eines 16-dimensionalen Vektorraums, dessen Elemente Abbildungen sind. (Vergessen Sie nicht die formal korrekte Angabe der Operationen.)
- (b) Geben Sie Teilräume A, B Ihres Vektorraums V an, die die Dimensionen 3 und 4 haben und wo $S := A + B$ die Dimension 5 hat. Welche Dimension hat $D := A \cap B$? *4 + 2 = 6 Punkte*
-

Aufgabe 2.

Stellen Sie sich einen Vektorraum mit einer endlichen Basisfolge \mathcal{B} als gegeben vor. Weiter seien Teilräume A und B durch endliche Folgen von Erzeugenden gegeben, die überdies als Linearkombinationen in der Basisfolge \mathcal{B} dargestellt sind. Wie prüft man, ob A ein Teilraum von B ist? *4 Punkte*

Aufgabe 3.

Je nach Wahl des reellen Parameters t hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - (t+1) \cdot x_3 &= -2 \\ 0 \cdot x_1 + t \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= t \\ 1 \cdot x_1 - t \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= 2-t \end{aligned}$$

unterschiedliche Lösungsmengen.

- (a) Für welche Werte von t ist das Gleichungssystem lösbar?
- (b) Berechnen Sie in den lösbaren Fällen jeweils die Lösungsmenge M und schreiben Sie sie als Element eines Faktorraums F von $\mathbb{R}^{3 \times 1}$. Welche Dimension hat F ? *3 + 6 = 9 Punkte*
-

Aufgabe 4.

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem so gut wie es geht.

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 1 \\ 6x + 10y &= 7. \end{aligned} \qquad \qquad \qquad \textit{5 bis 7 Punkte}$$

Aufgabe 5.

Wir betrachten die quadratischen Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 8 \\ 8 & 8 & 22 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- (a) Berechnen Sie (multiplikativ) inverse Matrizen zu diesen Matrizen.
- (b) Welche der durch $\alpha_i := (x \mapsto A_i x \text{ für } x \in \mathbb{R}^{3 \times 1}): \mathbb{R}^{3 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 1}$ definierten Abbildungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind linear, welche injektiv, welche Isomorphismen?
- (c) Auf einem 3-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum V mit einer Basisfolge \mathcal{B} seien zwei Skalarprodukte Φ und Ψ durch ihre Matrizen ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = A_2$ und ${}^{\mathcal{B}}\Psi_{\mathcal{B}} = A_3$ gegeben. Welche dieser Skalarprodukte sind nicht ausgeartet, welche positiv definit? (Begründung.) *6 + 3 + 5 = 14 Punkte*
-

Aufgabenblatt 2 (Lineare Algebra I) zur Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte
Mathematik, RWTH Aachen

Aufgabe 6.

Es sei $V = \mathbb{R}^{1 \times 5}$.

Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi: V \rightarrow V$ mit Kern $\varphi <$ Bild φ ?

Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi: V \rightarrow V$ mit Kern $\varphi =$ Bild φ ?

Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi: V \rightarrow V$ mit Kern $\varphi >$ Bild φ ?

(Antwort jeweils mit Beispiel oder Beweis.)

3 Punkte

Aufgabe 7.

Zur reellen 3×5 -Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ betrachten wir die lineare Abbildung $\varphi =$

$(x \mapsto Ax \text{ für } x \in \mathbb{R}^{5 \times 1}): \mathbb{R}^{5 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Berechnen Sie eine Basisfolge von $\mathbb{R}^{3 \times 1}/\text{Bild } \varphi$. 6 Punkte

Aufgabe 8.

In einem n -dimensionalen K -Vektorraum V seien Basisfolgen \mathcal{B} , \mathcal{C} und \mathcal{D} sowie eine lineare Abbildung φ und eine Bilinearform Φ gegeben, so dass ${}_{\mathcal{D}}\text{id}_{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}} = A \in K^{n \times n}$ und ${}_{\mathcal{D}}\text{id}_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = B \in K^{n \times n}$ gilt. Berechnen Sie für die Matrizen ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$ jeweils eine Formel, die die gesuchte Matrix in A und B ausdrückt (und keine Klammern enthält).

5 Punkte

Aufgabe 9.

(a) Geben Sie ein Beispiel eines \mathbb{R} -Vektorraums V mit einer nicht ausgearteten Bilinearform Φ und einem Teilraum $W \leq V$, für den V nicht die (innere) direkte Summe der Teilräume W und W^{\perp} ist.

(b) Gilt in Ihrem Beispiel die Formel $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$?

4 + 1 = 5 Punkte

Aufgabe 10.

Auf dem reellen Intervall $I = [0, 1]$ sei die Funktion $f = (x \mapsto -x^2 + 1): I \rightarrow I$ gegeben. Stellen sie sich vor, jemand fragt Sie: Welche der beiden Polynomfunktionen $g = (x \mapsto -x + 1): I \rightarrow I$ und $h = (x \mapsto -x + \frac{5}{4}): I \rightarrow I$ vom Grad 1 approximiert f „besser“? Da Sie wegen Ihrer Klausur wenig Zeit haben, überlassen Sie ihm das Rechnen und sagen ihm nur, welche Ausdrücke er ausrechnen soll. Welche?

4 Punkte

Aufgabe 11.

Wie viele Geraden hat ein 3-dimensionaler affiner Raum (also ein affiner Raum über einem 3-dimensionalen Vektorraum) über dem Körper \mathbb{Z}_2 ? (Wie ergibt sich diese Anzahl?)

4 Punkte

Aufgabe 12.

Wegen $4711 = 7 \cdot 673$ ist der Restklassenring $\mathbb{Z}_{4711} = \mathbb{Z}/4711\mathbb{Z}$ kein Körper. Trotzdem besitzt die Restklasse, in der die Zahl 205 liegt, ein (multiplikativ) inverses Element (warum?). Berechnen Sie es (und erläutern Sie dabei ihre Rechnung).

5 Punkte

Aufgabenblatt 3 (Diskrete Strukturen) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte
Mathematik, RWTH Aachen

Aufgabe 13.

Formulieren Sie den Satz von Dilworth für den Spezialfall eines Spernerposets P , und verifizieren Sie ihn am Hassediagramm eines rangsymmetrischen Spernerposets ihrer Wahl, welches \mathcal{B}_3 (=Poset der Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$) als echtes induziertes Unterposet enthält. 7 Punkte

Aufgabe 14.

- (a) Zeichnen Sie die Hassediagramme des Posets $P = \underline{1} \oplus (\underline{2} + \underline{2}) \oplus \underline{1}$ und des Posets $\mathcal{O}(P)$ aller Ideale von P . Geben Sie den Elementen von P geeignete Namen und notieren Sie an jedem Element von $\mathcal{O}(P)$ die Elemente des entsprechenden Ideals von P ; unterstreichen Sie dabei die Elemente der erzeugenden Antikette.
- (b) Charakterisieren Sie für beliebige Posets P und Q die Elemente von $\mathcal{O}(P \oplus Q)$ mit Hilfe der Elemente von $\mathcal{O}(P)$ und $\mathcal{O}(Q)$. 6 + 4 = 10 Punkte
-

Aufgabe 15.

Beweisen Sie einmal algebraisch und dann kombinatorisch mit Hilfe von Teilmengen:

$$\binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k} \quad \text{für } n, r, k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

und leiten Sie daraus ab:

$$\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k} = 2^r \binom{n}{r}. \quad \text{8 Punkte}$$

Aufgabe 16.

N.N. behauptet:

“Die Anzahl der k -Multimengen, die man aus einer n -Menge bilden kann, ist $\frac{n^k}{k!}$, weil”

- (a) Was hat N.N. vermutlich als Begründung gegeben und was ist daran verkehrt?
- (b) Welches ist die richtige Anzahl? Ist diese \geq oder \leq als $\frac{n^k}{k!}$, oder hängt das von n und k ab?
- (c) Geben Sie einen Beweis des richtigen Ergebnisses. 4 + 2 + 3 = 9 Punkte
-

Aufgabe 17.

Eine Zählfunktion $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ habe die rationale erzeugende Funktion

$$\sum_{n \geq 0} f(n)x^n = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{-4x^3 + 4x^2 + 7x + 2}{4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1}.$$

Bestimmen Sie eine Rekursionformel (inklusive Anfangsbedingungen) und eine explizite Darstellung für f . 12 Punkte

Aufgabenblatt 4 (Diskrete Strukturen) zur Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte
Mathematik, RWTH Aachen

Aufgabe 18.

Für jede natürliche Zahl n sei

$$L_n := \{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid 0 \leq l_i \leq n - i, i = 1, \dots, n\}$$

und S_n die Menge der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $L : S_n \rightarrow L_n$ definiert durch

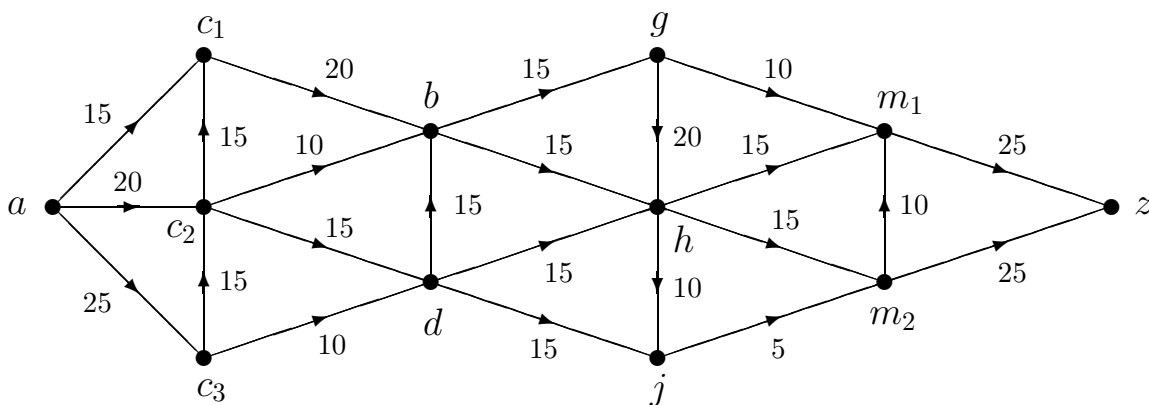
$$l_i = l_i(\pi) := \#\{j \mid i < j, \pi(i) > \pi(j)\} \text{ für } i = 1, \dots, n$$

eine Bijektion mit $l_1 + \dots + l_n = l(\pi)$ [$l(\pi)$ die Länge von π] ist.

(b) Berechnen Sie $L(\pi)$ für $\pi = 4163752 \in S_7$ und $L^{-1}(3, 6, 4, 0, 2, 1, 1, 0) \in S_8$. *6 + 2 = 8 Punkte*

Aufgabe 19.

Bestimmen Sie für das nachstehend abgebildete Netzwerk zwei maximale Flüsse mit *verschiedenen* zugehörigen minimalen Schnitten $L = (A, \bar{A})$:



Überprüfen Sie, dass es sich bei Ihren Lösungen tatsächlich um Flüsse handelt und dass in beiden Fällen die maximalen Flusstärken mit den minimalen Kapazitäten übereinstimmen; markieren Sie alle für die Berechnung der Kapazität relevanten Kanten. *12 Punkte*

Aufgabe 20.

- Geben Sie den Satz von Turan an und folgern Sie daraus, dass jeder Graph mit $2n$ Ecken und $n^2 + 1$ oder mehr Kanten einen K_3 als Untergraph enthält.
- Zeigen Sie, dass jeder 3-reguläre Graph G eine gerade Eckenzahl hat, und bestimmen Sie die Anzahl der Kanten von G .
- Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und (b), dass es (bis auf Isomorphie) nur einen 3-regulären Graphen mit 4 Ecken geben kann. *4 + 2 + 2 = 8 Punkte*