Gruppe A

Übungsschein-Klausur 18.7.2002

Lineare Algebra II, SS 2002, Prof. Dr. G. Hiß

Bei vollständiger Lösung aller Aufgaben erhalten Sie 40 Punkte. Die Klausur gilt als bestanden, wenn Sie mindestens 20 Punkte erreichen. Viel Erfolg!

Kreuzen Sie bei jeder der folgenden 10 Fragen entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: *Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. Sie bekommen mindestens 0 Punkte für alle Multiple-Choice-Aufgaben zusammen.*

1	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ist ein Ideal von $\mathbb{Z}$.	☐ Ja	☐ Nein
2	Die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers mit genau 125 Elementen besitzt eine Untergruppe der Ordnung 31.	☐ Ja	☐ Nein
3	Zu jedem Körper K und $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Matrix $A \in K^{n\times n}$, deren Frobenius-Normalform auch ihre Weierstraß-Normalform ist.	☐ Ja	☐ Nein
4	Sei K ein Körper und seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Dann gilt für jede lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ die Gleichung $\dim(W) + \dim(\mathrm{Bild}\,\varphi) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Kern}\,\varphi)$.	☐ Ja	☐ Nein
5	Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einer nicht-ausgearteten Bilinearform. Dann hat für jede Basis von V die zugehörige Strukturmatrix der Bilinearform eine Determinante ungleich Null.	☐ Ja	☐ Nein
6	Sei p eine Primzahl, $n, m \in \mathbb{N}$ und F ein Körper mit p^n Elementen. Genau dann enthält F einen Teilkörper mit p^m Elementen, wenn $m \leq n$ und $ggT(m,n) = 1$ ist.	☐ Ja	☐ Nein
7	Zu jedem (endlich- oder unendlich dimensionalen) Vektorraum V gibt es einen Dualraum V^* und zu jeder Basis von V gibt es eine duale Basis von V^*.	☐ Ja	☐ Nein
8	Sei G eine endliche Gruppe, $g \in G$ und $C = \{x \in G \mid \ xgx^{-1} = g\}$. Dann ist $\|G\|/\|C\| \in \mathbb{Z}$.	☐ Ja	☐ Nein
9	In einem Integritätsbereich wird jedes Ideal von einem Element erzeugt.	☐ Ja	☐ Nein
10	Es gibt einen endlichen Körper F, über dem ein $[8,4,6]$-Code existiert.	☐ Ja	☐ Nein

Gruppe A

Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Vergessen Sie nicht, alle Ihre Aussagen ***zu begründen****. Für jede Aufgabe gibt es maximal* 6 *Punkte.*

Bitte, fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

Aufgabe 11. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}.$$

Berechnen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$, so dass $T^{-1}AT$ Jordansche Normalform hat.

Aufgabe 12. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto 60 \cdot \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$ eine Bilinearform auf V ist. Stellen Sie die Strukturmatrix dieser Bilinearform bezüglich der Basis $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$ auf.

Aufgabe 13. Seien

$$f(X) = X^7 + X^6 + X^5 - X^2 - X - 1$$

und

$$g(X) = X^6 + X^5 + 2\,X^4 + 2\,X^3 + 2\,X^2 + X + 1$$

aus $\mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von f und g, sowie Polynome $a(X), b(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $af + bg = \mathrm{ggT}(f, g)$.

Aufgabe 14. Berechnen Sie die Elementar- und Invariantenteiler der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 54 & 9 & 0 & -27 \\ 0 & 8 & 0 & 10 & -8 \\ 0 & -60 & 4 & 30 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 22 & -16 \\ 0 & -12 & 0 & 30 & -12 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{5\times 5}.$$

Aufgabe 15. Wieviele paarweise nicht ähnliche Matrizen aus $\mathbb{Q}^{16\times 16}$ gibt es, die das charakteristische Polynom $(X-1)^8(X-2)^8$ und Minimalpolynom $(X-1)(X-2)^5$ haben? Wie lautet die Antwort auf die gleiche Frage für $\mathbb{C}^{16\times 16}$?

Gruppe B

Übungsschein-Klausur 18.7.2002

Lineare Algebra II, SS 2002, Prof. Dr. G. Hiß

Bei vollständiger Lösung aller Aufgaben erhalten Sie 40 Punkte. Die Klausur gilt als bestanden, wenn Sie mindestens 20 Punkte erreichen. Viel Erfolg!

Kreuzen Sie bei jeder der folgenden 10 Fragen entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: *Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. Sie bekommen mindestens 0 Punkte für alle Multiple-Choice-Aufgaben zusammen.*

1	Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einer nicht-ausgearteten Bilinearform. Dann hat für jede Basis von V die zugehörige Strukturmatrix der Bilinearform eine Determinante ungleich Null.	☐ Ja	☐ Nein
2	In einem Integritätsbereich wird jedes Ideal von einem Element erzeugt.	☐ Ja	☐ Nein
3	Zu jedem Körper K und $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Matrix $A \in K^{n\times n}$, deren Frobenius-Normalform auch ihre Weierstraß-Normalform ist.	☐ Ja	☐ Nein
4	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ist ein Ideal von $\mathbb{Z}$.	☐ Ja	☐ Nein
5	Es gibt einen endlichen Körper F, über dem ein $[8, 4, 6]$-Code existiert.	☐ Ja	☐ Nein
6	Sei G eine endliche Gruppe, $g \in G$ und $C = \{x \in G \mid \ xgx^{-1} = g\}$. Dann ist $\|G\|/\|C\| \in \mathbb{Z}$.	☐ Ja	☐ Nein
7	Zu jedem (endlich- oder unendlich dimensionalen) Vektorraum V gibt es einen Dualraum V^* und zu jeder Basis von V gibt es eine duale Basis von V^*.	☐ Ja	☐ Nein
8	Sei K ein Körper und seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Dann gilt für jede lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ die Gleichung $\dim(W) + \dim(\mathrm{Bild}\,\varphi) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Kern}\,\varphi)$.	☐ Ja	☐ Nein
9	Die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers mit genau 125 Elementen besitzt eine Untergruppe der Ordnung 31.	☐ Ja	☐ Nein
10	Sei p eine Primzahl, $n, m \in \mathbb{N}$ und F ein Körper mit p^n Elementen. Genau dann enthält F einen Teilkörper mit p^m Elementen, wenn $m \leq n$ und $ggT(m, n) = 1$ ist.	☐ Ja	☐ Nein

Gruppe B

Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Vergessen Sie nicht, alle Ihre Aussagen ***zu begründen****. Für jede Aufgabe gibt es maximal* 6 *Punkte.*

Bitte, fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

Aufgabe 11. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}.$$

Berechnen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$, so dass $T^{-1}AT$ Jordansche Normalform hat.

Aufgabe 12. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto 60 \cdot \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$ eine Bilinearform auf V ist. Stellen Sie die Strukturmatrix dieser Bilinearform bezüglich der Basis $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$ auf.

Aufgabe 13. Seien

$$f(X) = X^7 + X^6 + X^5 - X^2 - X - 1$$

und

$$g(X) = X^6 + X^5 + 2\,X^4 + 2\,X^3 + 2\,X^2 + X + 1$$

aus $\mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von f und g, sowie Polynome $a(X), b(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $af + bg = \mathrm{ggT}(f, g)$.

Aufgabe 14. Berechnen Sie die Elementar- und Invariantenteiler der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 54 & 9 & 0 & -27 \\ 0 & 8 & 0 & 10 & -8 \\ 0 & -60 & 4 & 30 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 22 & -16 \\ 0 & -12 & 0 & 30 & -12 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{5\times 5}.$$

Aufgabe 15. Wieviele paarweise nicht ähnliche Matrizen aus $\mathbb{Q}^{16\times 16}$ gibt es, die das charakteristische Polynom $(X-1)^8(X-2)^8$ und Minimalpolynom $(X-1)(X-2)^5$ haben? Wie lautet die Antwort auf die gleiche Frage für $\mathbb{C}^{16\times 16}$?