31.03.2011

Klausur zur Linearen Algebra II, WS 10/11

Prof. Dr. G. Hiß

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Es wird darauf hingewiesen, dass Sie eine Zulassung zu dieser Klausur erworben haben müssen und sich je nach Studiengang gegebenenfalls bei dem für Sie zuständigen Prüfungsamt angemeldet haben müssen. Ihre Teilnahme an der Klausur erfolgt insoweit vorbehaltlich einer gültigen Zulassung und Anmeldung. Durch Ihre Unterschrift bestätigen Sie die Kenntnisnahme dieser Regelung.

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________________

	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									
Nachk.									

Bitte beachten Sie:

- Bearbeiten Sie auf jeder Seite nur **eine** Aufgabe.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Ausführliche Begründungen bilden einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe.
- Achten Sie bei Beweisen auf die Vollständigkeit Ihrer Argumentation.

31.03.2011

Klausur zur Linearen Algebra II, WS 10/11

Prof. Dr. G. Hiß

Aufgabe 1: $3+1+4=8$ *Punkte*

Es sei Q eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^2$ mit $Q(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = 3x^2 - 4xy + 3y^2$.

a) Berechnen Sie die Gram–Matrix A der zugehörigen symmetrischen Biliniearform

$$\beta_Q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

bezüglich der Standardbasis.

b) Ist β_Q positiv definit?

c) Berechnen Sie eine Matrix S, so dass $S^{\mathrm{t}}AS$ eine Diagonalmatrix ist und geben Sie $S^{\mathrm{t}}AS$ an.

Aufgabe 2: 8 *Punkte*

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und Q die quadratische Form auf $\mathbb{R}^3$ mit

$$Q(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = x^2 - y^2 - z^2.$$

Es sei β_Q die zu Q gehörende symmetrische Bilinearform. Gibt es eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass $\mathrm{B}_{\mathcal{C}}(\beta_Q) = A$ ist?

Aufgabe 3: 8 *Punkte*

Es sei $V = \mathbb{Q}^5$ mit Standardbasis $\mathcal{B}$ und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V)$, sodass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$$

ist. Geben Sie eine geordnete Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{Q}^5$ an, sodass $\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ in Jordan-Normalform ist und geben Sie die Jordan-Normalform an.

Aufgabe 4: 7 *Punkte*

Geben Sie alle möglichen Jordan-Normalformen (bis auf Reihenfolge der Jordankästchen) einer Matrix A an, deren charakteristisches Polynom $(X-2)^3(X-5)^2$ ist. Geben Sie auch jeweils das Minimalpolynom von A an.

Bitte wenden

Aufgabe 5: $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ *Punkte*

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}$$

Berechnen Sie

a) die Frobenius Normalform von A.

b) das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A.

c) die Weierstraßsche Normalform von A.

d) die Jordansche Normalform von A, falls sie existiert.

Aufgabe 6: *7 Punkte*

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $v, u \in V$. Zeigen Sie, dass genau dann $v \in \langle u \rangle$ ist, wenn für alle $\lambda \in V^*$ aus $\lambda(u) = 0$ stets $\lambda(v) = 0$ folgt.

Aufgabe 7: *7 Punkte*

Zeigen Sie, dass es kein $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $e^A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ gibt.

Aufgabe 8: $3 + 4 = 7$ *Punkte*

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und φ ein Endomorphismus von V.

a) Zeigen Sie, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$\mathrm{Kern}(\varphi^N) = \mathrm{Kern}(\varphi^{N+1}) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Bild}(\varphi^N) = \mathrm{Bild}(\varphi^{N+1})$$

ist.

b) Zeigen Sie, dass $V = \mathrm{Kern}(\varphi^N) \oplus \mathrm{Bild}(\varphi^N)$ eine direkte Summe φ-invarianter Unterräume ist.
