Klausur zur „Linearen Algebra II“ (SS 93)

<u>Bearbeitungszeit: 180 Minuten</u>

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß <u>ausführliche Begründungen</u> einen <u>wesentlichen Teil</u> der Lösung einer Aufgabe bilden.
Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 50 Punkte notwendig. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Es sei $P_3 = \{a+bx+cx^2+dx^3 | a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome p mit $\text{Grad}(p) \leq 3$. Es sei weiter $\Phi : P_3 \times P_3 \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt gegeben durch $\Phi(f,g) = f(1)g(1) - f(0)g(0)$ für $f, g \in P_3$. Eine Basis B von P_3 ist $(1, x, x^2, x^3)$.

1. Man berechne ${}_B\Phi_B$. *3 Punkte*
2. Man berechne $Rad(\Phi)$ *3 Punkte*
3. Man berechne Rang, Signatur und Index von Φ. *5 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei $V = \mathbb{R}^3$, B eine Basis und φ die lineare Abbildung mit

$$ {}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -12 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

1. Man bestimem die Jordannormalform von φ. *5 Punkte*
2. Man bestimme eine Basis C von V, so daß ${}_C\varphi_C$ in Jordannormalform ist. *6 Punkte*

HINWEIS: Die Eigenwerte von φ sind ganzzahlig.

Aufgabe 3.
Es sei $V = \mathbb{R}^3$, Φ ein positiv definites Skalarprodukt, B eine Orthonormalbasis und $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$ gegeben durch ${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Man bestimme eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von φ. *10 Punkte*
HINWEIS: Die Eigenwerte von φ sind ganzzahlig.

Aufgabe 4.
Wieviele Klassen ähnlicher, invertierbarer Matrizen gibt es in ${\mathbb{F}_3}^{2\times 2}$? Man gebe aus jeder Klasse eine Matrix an. *8 Punkte*

Aufgabe 5.
Es sei K ein Körper. Es seien $A, B \in K^{3\times 3}$ Matrizen mit gleichem charakteristischen Polynom und gleichem Minimalpolynom. Man zeige: A und B sind ähnlich. *10 Punkte*
Gilt diese Aussage auch für Matrizen in $K^{n\times n}$ mit $n > 3$? (Beweis oder Gegenbeispiel!) *4 Punkte*

Aufgabe 6.
Es sei V ein n-dim. $\mathbb{C}$-Vektorraum, Φ ein positiv definites Hermitesches Produkt und $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,V)$. Welche der folgenden Bedingungen sind hinreichend, welche notwendig dafür, daß V eine Basis aus Eigenvektoren von φ besitzt? (Kurze Begründung oder Gegenbeispiel!)

1. φ hat n verschiedene Eigenwerte. *2 Punkte*
2. φ ist Hermitesch bezüglich Φ. *2 Punkte*
3. φ hat nur eindimensionale Jordankästchen. *2 Punkte*
4. Die zu φ gehörenden Elementarteiler sind konstant oder linear. *2 Punkte*
5. $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi^2)$. *2 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ der Körper mit fünf Elementen. Es seien weiter

$$f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x \text{ und } g = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

aus $\mathbb{F}_5[x]$ gegeben. Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler d mit führendem Koeffizienten 1 von f und g sowie Polynome a und b mit $d = f \cdot a + g \cdot b$. *8 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei $A = (a_{ij}) \in K^{2n \times 2n}$ definiert durch $a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i + j = 2n + 1 \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$.
Berechnen Sie zunächst das Minimalpolynom, dann das charakteristische Polynom und eine Normalform von A. *12 Punkte*

HINWEIS : Berechnen Sie A^2. Versuchen Sie nicht, das charakteristische Polynom direkt zu berechnen, sondern leiten Sie es mit Hilfe des Minimalpolynoms her. Unterscheiden Sie die Fälle *char* $K = 2$ und *char* $K \neq 2$.
ZUSATZ : Falls Sie mit der Lösung der Aufgabe für beliebiges n Schwierigkeiten haben, bearbeiten Sie statt dessen diese Frage für $n = 4$ (dafür gibt es aber nur 5 Punkte).

Aufgabe 9.
Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen und $f = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.

1. Man zeige: $K = \mathbb{F}_2[X]/(f)$ ist ein Körper. *3 Punkte*
2. Man bestimme ein $g \in \mathbb{F}_2[x]$ mit $\mathrm{Grad}(g) \leq 2$ und $((f) + x)^5 = (f) + g$. *5 Punkte*

Aufgabe 10.
Es sei B die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Es sei $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots \\ b & a & b & \cdots \\ b & b & a & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Man zeige: $\varphi \geq 0$ (bezgl. des Standardskalarproduktes) genau dann,
wenn $(a - b) \geq 0$ und $a + (n-1)b \geq 0$. *12 Punkte*
HINWEIS: Man zeige, daß $(a - b)$ Eigenwert von φ ist, und benutze den Spektralsatz.