Ersatzklausur zur Linearen Algebra II (17. 10. 97)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 9 gegebenen Aufgaben für insgesamt 67 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 25 Punkte notwendig. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

Es sei $K = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen. Berechnen Sie einen größten gemeinsamen Teiler d der Polynome

$$f = x^5 + x + 1 \quad \text{und} \quad g = x^4 + x^2 + 1$$

aus $K[x]$ sowie Polynome a und b mit $d = f \cdot a + g \cdot b$. *6 Punkte*

Aufgabe 2.

Im $\mathbb{R}$-Spaltenraum $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt Φ sei ein Vektor $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben.

Beweisen Sie: Sind a und b teilerfremd, so gibt es einen Vektor $Y = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $c, d \in \mathbb{Z}$, so daß $\Phi(X, Y) = 1$ ist. (Argumentation und Formulierung sind wichtig.) *4 Punkte*

Aufgabe 3.

(a) Es sei R ein Ring und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Sind Matrizen A und B aus $R^{n \times n}$ ähnlich, so sind sie äquivalent.

(b) Es sei nun $R = K$ ein Körper und $n = 2$. Geben Sie ein konkretes Beispiel für zwei Matrizen A und B aus $K^{2 \times 2}$ an, so daß A und B äquivalent, aber nicht ähnlich sind, und beweisen Sie das.

(Es kommt jeweils auf die Argumentation an.) *3 + 6 = 9 Punkte*

Aufgabe 4.

Wie viele Klassen ähnlicher Matrizen gibt es in $\mathbb{F}_2^{2 \times 2}$? Geben Sie aus jeder Klasse eine Matrix an. (Die Begründung ist wichtig.) *7 Punkte*

Aufgabe 5.

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x+1 \end{bmatrix}$ über dem Polynomring $\mathbb{Q}[x]$. Berechnen Sie mit Hilfe des Elementarteileralgorithmus invertierbare Matrizen P und Q aus $\mathbb{Q}[x]^{2 \times 2}$, so daß $P \cdot A \cdot Q$ von der Form $\begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}$ ist mit normierten Polynomen f und g (d. h., der Koeffizient der höchsten vorkommenden Potenz von x ist jeweils gleich 1) und der Eigenschaft $f \mid g$. *7 Punkte*

Aufgabe 6.
Es sei $V = \mathbb{R}^4$, B eine Basis von V und ${}_B\varphi_B = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ die Abbidungsmatrix eines Endomorphismus φ von V bezüglich B.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_φ von φ.

Hinweis: A setzt sich aus zwei Begleitmatrizen zusammen, Sie brauchen also nicht die Determinante der charakteristischen Matrix von A zu berechnen.

(b) Ist A eine Frobenius-Normalform? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?

(c) Ist A eine Weierstaß-Normalform? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?

Entscheiden Sie die Fragen (b) und (c) direkt anhand von Eigenschaften der Matrix A, ohne die entsprechenden Normalformen von A oder gar eine Liste aller zu p_φ passenden Normalformen zu berechnen. (Es kommt auf die Begründung an.) *2 + 3 + 3 = 8 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und I die Einheitsmatrix. Bestimmen Sie

(a) die Elementarteiler der charakteristischen Matrix $A - xI$ und daraus dann

(b) die Frobenius-Normalform von A,

(c) die Weierstraß-Normalform von A,

(d) die Jordan-Normalform von A. *6 + 1 + 2 + 1 = 10 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einem Skalarprodukt Φ, und es sei $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, V)$. Beweisen Sie: Ist φ symmetrisch bezüglich Φ, so sind die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten von φ orthogonal bezüglich Φ. *6 Punkte*

Aufgabe 9.
Im Vektorraum $\mathbb{C}^2$ mit Basis B seien ein (positiv definites) hermitesches Produkt Φ und ein Endomorphismus φ durch ${}_B\Phi_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ und ${}_B\varphi_B = \begin{bmatrix} i & i \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die adjungierte Abbildung φ^{ad}.

(b) Untersuchen Sie, ob φ normal bezüglich Φ ist. *6 + 4 = 10 Punkte*
