

NAME _____

MATRIKELNUMMER _____

STUDIENGANG _____

Prof. Dr. Eva Zerz

WS 2007/08

Lineare Algebra II – Klausur am 6.3.2008

Gruppe A

- Für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden
- Name, Matrikelnummer, Aufgabennummer auf jedes Blatt
- Nicht mit Rot schreiben
- Es gibt **6 Aufgaben** und insgesamt **100 Punkte**

Aufgabe	Punkte	
1	20	
2	18	
3	16	
4	12	
5	20	
6	14	

Viel Glück!

1. (2+2+2+6+4+4 Pkt) Gegeben sei das Kronecker-Produkt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -11 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}.$$

Bestimmen Sie

- (a) die Determinante, (b) die Spur, (c) den Rang, (d) das Minimalpolynom μ_A ,
(e) das charakteristische Polynom χ_A , (f) die Jordan-Normalform von A (falls existent).

Hinweis: Sie müssen hier nicht mit 4×4 Matrizen arbeiten.

2. (6+6+6 Pkt)

- (a) Bestimmen Sie die invarianten Faktoren der Abelschen Gruppe $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$.
(b) Wieviele Isomorphieklassen Abelscher Gruppen mit $|G|$ Elementen gibt es?
(c) Sei M die Menge aller reellen Matrizen A mit $\chi_A = (x+1)^3(x-2)^9$ und $\mu_A = (x+1)(x-2)^5$. In wieviele Äquivalenzklassen bezüglich Ähnlichkeit zerfällt M ?

3. (4+4+4+4 Pkt)

Es sei $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ und $\chi_A = (x-3)^2(x+4)$. Bestimmen Sie alle (paarweise nicht ähnlichen)

- (a) Frobenius-, (b) Weierstraß-, (c) Jordan-Formen, zu denen A ähnlich sein kann.
(d) Bestimmen Sie alle möglichen Minimalpolynome von A .

4. (8+4 Pkt) Sei G eine Abelsche Gruppe, die treu und transitiv auf der Menge M operiert.
- (a) Zeigen Sie, dass die Operation dann frei ist.
 - (b) Folgern Sie, dass für alle $x \in M$ die Abbildung

$$G \rightarrow M, \quad g \mapsto g \cdot x$$

bijektiv ist.

Hinweis: Sie können den leichteren Teil (b) auch ohne Beweis von (a) machen.

5. (20 Pkt) Analysieren Sie den affinen Typ der durch die Gleichung

$$x^2 + 2axy + a^2y^2 + 4x - 7y + d = 0$$

gegebenen Quadrik in Abhängigkeit von den Parametern $a, d \in \mathbb{R}$.

6. (4+2+8 Pkt) Berechnen Sie (a) ggT($5x^3 - 10x^2 - 25x + 30, 2x^2 - 14x + 12$) und (b) Kofaktoren zu diesem ggT. (c) Lösen Sie das Kongruenzensystem

$$x \equiv 3 \pmod{4}, \quad x \equiv 4 \pmod{5}, \quad x \equiv 5 \pmod{7}.$$