NAME ______________________________

MATRIKELNUMMER ______________________________

STUDIENGANG ______________________________

Prof. Dr. Eva Zerz WS 2007/08

Lineare Algebra II – Klausur am 3.4.2008
Gruppe B

- **Für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden**
- **Name, Matrikelnummer, Aufgabennummer auf jedes Blatt**
- Nicht mit Rot schreiben
- Es gibt **6 Aufgaben** und insgesamt **100 Punkte**

Aufgabe	Punkte	
1	20	
2	20	
3	9	
4	13	
5	20	
6	18	

Viel Glück!

1. *(2+2+2+6+4+4 Pkt)* Gegeben sei das Kronecker-Produkt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie
(a) die Determinante, (b) die Spur, (c) den Rang, (d) das Minimalpolynom μ_A,
(e) das charakteristische Polynom χ_A, (f) die Jordan-Normalform von A (falls existent).

2. *(6+3+6+5 Pkt)*

(a) Bestimmen Sie die invarianten Faktoren des $\mathbb{Z}$-Moduls $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$.

(b) Wieviele Isomorphieklassen von $\mathbb{Z}$-Moduln mit $|M|$ Elementen gibt es?

(c) Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphieklassen von $\mathbb{Z}$-Moduln mit 36 Elementen und geben Sie für jede Isomorphieklasse einen Vertreter an.

(d) Sei M die Menge aller reellen Matrizen A mit $\chi_A = (x+1)^5(x-2)^8$ und $\mu_A = (x+1)^3(x-2)^5$. In wieviele Äquivalenzklassen bezüglich Ähnlichkeit zerfällt M?

3. *(3+3+3 Pkt)* Bestimmen Sie, wenn möglich, die Jordan-Normalform der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in K^{2\times 2}$$

für (a) $K = \mathbb{R}$, (b) $K = \mathbb{C}$, (c) $K = \mathbb{Z}_2$.

4. *(3+5+5 Pkt)* Beweisen Sie:

(a) Sei R ein Hauptidealbereich und $r \in R$ irreduzibel. Wenn r ein beliebiges endliches Produkt von Ringelementen teilt, so teilt r mindestens einen der Faktoren.

(b) Ist K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$, so ist jeder Eigenwert von A eine Nullstelle des Minimalpolynoms von A.

(c) Die Menge aller symmetrischen reellen 3×3 Matrizen zerfällt in genau 10 Äquivalenzklassen bezüglich Kongruenz.

5. *(3+2+15 Pkt)* Gegeben sei die quadratische Form

$$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto q(x_1, x_2) = cx_1^2 + 2ax_1x_2 + x_2^2,$$

wobei $a, c \in \mathbb{R}$ Parameter sind.

(a) Bestimmen Sie den Typ der zu q gehörigen symmetrischen Bilinearform b in Abhängigkeit von $a, c \in \mathbb{R}$.

(b) Sei B die Gram'sche Matrix von b bzgl. der Standardbasis. Für welche $a, c \in \mathbb{R}$ ist $\mathrm{Rang}(B)$ maximal?

(c) Analysieren Sie den affinen Typ der durch die Gleichung $q(x_1, x_2) = -7x_1 + 4x_2 - d$ gegebenen Quadrik für alle $a, c \in \mathbb{R}$ mit $c > a^2$ und beliebiges $d \in \mathbb{R}$.

6. *(6+6+6 Pkt)* Berechnen Sie die Ordnung jedes Elementes der Gruppe

(a) $G = \mathbb{Z}_6$ mit Addition, (b) $H = \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$ mit Multiplikation.

(c) Geben Sie, wenn möglich, einen Gruppenisomorphismus $G \to H$ an, oder begründen Sie, warum G und H nicht isomorph sind.