17.07.2007 (1. Termin)

Klausur zu "Lineare Algebra I für Informatiker", SS 07

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur in Lineare Algebra I
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ Matr.-Nr. | | | | | | |

Vorname: ______________________ Unterschrift: ______________________

Aufgabe Nr.	1	2	3	4	5	6	Bonus	Σ	Note
Typ	MC	MC	E	E	S	S	S	—	—
Maximalpunkte	3	3	12	12	12	12	6	54	—
Punkte									
Nachkorrektur									

Aufgabentyp MC:

Kreuzen Sie bei Aufgaben diesen Typs entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an. Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz. Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Aufgabentyp E:

Hier sollen Sie Ihre Aussagen nicht begründen, sondern nur die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen auf dem Aufgabenblatt eintragen. Bitte geben sie zu diesen Aufgaben keine gesonderten Blätter mit Rechnungen ab. Für das richtige Ergebnis gibt es die angegebene Punktzahl, für eine falsche Antwort Null Punkte. Machen Sie deshalb vor dem Eintrag Ihres Ergebnisses unbedingt eine geeignete Proberechnung! *Tips:* Oft schließt die jeweils nachfolgende Teilaufgabe (bei richtiger Interpretation) schon eine Probe mit ein. Außerdem kommen in die Kästchen immer ganze Zahlen!

Aufgabentyp S:

Bei diesen Aufgaben müssen Sie eine schriftliche Lösung auf einem gesonderten Blatt abgeben. Die Lösung ist strukturiert darzulegen und alle Aussagen sind ausführlich zu begründen. Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen, es sei denn, es ist explizit gefordert. Fangen Sie bitte für jede Aufgabe ein neues Blatt an, um die Korrektur zu erleichtern. Bonus-Aufgaben sind in der Regel etwas schwieriger und sollten daher erst nach Erledigung der regulären Aufgaben bearbeitet werden.

17.07.2007 (1. Termin), Gruppe **A**

Klausur zu "Lineare Algebra I für Informatiker", SS 07

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur in Lineare Algebra I
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 1. (Typ MC, 3 Punkte)

Es seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume über einem beliebigen Körper K. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. In welchen der folgenden Fälle ist die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ notwendigerweise injektiv?

a) wenn $\varphi(\mathcal{B})$ eine Basis von W ist ☒ Ja ☐ Nein
b) wenn der Rang einer Abbildungsmatrix von φ gleich $\dim V$ ist ☒ Ja ☐ Nein
c) wenn der Rang einer Abbildungsmatrix von φ gleich $\dim W$ ist ☐ Ja ☒ Nein

Aufgabe 2. (Typ MC, 3 Punkte)

Ist die angegebene Teilmenge des $\mathbb{Z}_3^2$ ein Unterraum?

a) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_3, 2x_1 + x_2 = x_1\}$ ☒ Ja ☐ Nein
b) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_3, x_1^2 + x_2 = x_1\}$ ☐ Ja ☒ Nein
c) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_3, x_1^3 + x_2 = x_1\}$ ☒ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3. (Typ E, 12 Punkte)

Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi(x) = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte c_1, c_2, c_3 von φ so, daß $c_1 < c_2 < c_3$ gilt, und finden Sie dann zu jedem der c_i einen Eigenvektor v_i mit ganzzahligen Einträgen.

$c_1 = \boxed{-1}$ $c_2 = \boxed{1}$ $c_3 = \boxed{2}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *(7 Punkte)*

b) Geben Sie eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$ an und berechnen Sie mit Hilfe von T den oberen linken Eintrag von A^{999}. Geben Sie als Zwischenergebnis zumindest diejenigen Einträge von T^{-1} an, die Sie bei Ihrer Rechnung benötigt haben.

$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{999} = \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ *(5 Punkte)*

Aufgabe 4. (Typ E, 12 Punkte)

Für $a \in \mathbb{R}$ sei die lineare Abbildung $\varphi_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi_a(x) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} x.$

a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, daß φ_a nicht bijektiv ist. Berechnen Sie dann für diesen speziellen Wert a eine Matrix B so, daß die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Bx$ als Kern genau Im φ_a hat. Es reicht, wenn Sie eine nicht-Null-Zeile von B angeben.

$a =$ $\boxed{-7}$ *(3 Punkte)*, $B =$ $\boxed{4 \mid -3 \mid -1}$ *(4 Punkte)*

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ wie oben bestimmt. Kreuzen Sie nun denjenigen Vektor für v an, der in Im φ_a liegt, und berechnen Sie für dieses v alle Lösungen von $\varphi_a(x) = v$.

$v =$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ *(2 Punkte)*

$\varphi_a^{-1}(v) =$ $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}}$ *(3 Punkte)*

Aufgabe 5. (Typ S, 12 Punkte)

Es sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der Endomorphismus mit $\varphi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1/5 \\ 7/5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -7/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Determinante von φ. *(4 Punkte)*

b) Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bzgl. der Standardbasis an. *(4 Punkte)*

c) Zeigen Sie, daß φ orthogonal ist. *(1 Punkte)*

d) Je nachdem ob φ eine Drehung oder eine Spiegelung ist, bestimmen Sie entweder den Kosinus des Drehwinkels oder bestimmen Sie die Spiegelachse. *(3 Punkte)*

Aufgabe 6. (Typ S, 12 Punkte)

Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$.

a) Ist jeder Eigenvektor von A auch Eigenvektor von A^t? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. *(4 Punkte)*

b) Zeigen Sie: Ist A invertierbar, dann sind alle Eigenwerte ungleich 0. *(4 Punkte)*

c) A heißt **schiefsymmetrisch** wenn $A^t = -A$ gilt. Zeigen Sie: Ist $A \in K^{5 \times 5}$ schiefsymmetrisch, dann ist 0 ein Eigenwert von A. *(4 Punkte)*

Bonus-Aufgabe. (Typ S, 6 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie, daß jedes $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\varphi^2 = \varphi$ diagonalisierbar ist. *(6 Punkte)*

Tip: Bringen Sie Ker φ und Im φ mit den Eigenräumen von φ in Zusammenhang.

Viel Erfolg!

17.07.2007 (1. Termin), Gruppe **B**

Klausur zu “Lineare Algebra I für Informatiker”, SS 07

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur in Lineare Algebra I

Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 1. (Typ MC, 3 Punkte)

Es seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume über einem beliebigen Körper K. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. In welchen der folgenden Fälle ist die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ notwendigerweise injektiv?

a) wenn der Rang einer Abbildungsmatrix von φ gleich $\dim W$ ist ☐ Ja ☒ Nein

b) wenn der Rang einer Abbildungsmatrix von φ gleich $\dim V$ ist ☒ Ja ☐ Nein

c) wenn $\varphi(\mathcal{B})$ eine Basis von W ist ☒ Ja ☐ Nein

Aufgabe 2. (Typ MC, 3 Punkte)

Ist die angegebene Teilmenge des $\mathbb{Z}_3^2$ ein Unterraum?

a) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_3, 2x_1 - x_2 = x_1\}$ ☒ Ja ☐ Nein

b) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_3, x_1^3 + x_2 = x_1\}$ ☒ Ja ☐ Nein

c) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_3, x_1^2 + x_2 = x_1\}$ ☐ Ja ☒ Nein

Aufgabe 3. (Typ E, 12 Punkte)

Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi(x) = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte c_1, c_2, c_3 von φ so, daß $c_1 < c_2 < c_3$ gilt, und finden Sie dann zu jedem der c_i einen Eigenvektor v_i mit ganzzahligen Einträgen.

$c_1 = \boxed{-2}$ $c_2 = \boxed{-1}$ $c_3 = \boxed{1}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *(7 Punkte)*

b) Geben Sie eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$ an und berechnen Sie mit Hilfe von T den oberen linken Eintrag von A^{999}. Geben Sie als Zwischenergebnis zumindest diejenigen Einträge von T^{-1} an, die Sie bei Ihrer Rechnung benötigt haben.

$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{999} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ *(5 Punkte)*

Aufgabe 4. (Typ E, 12 Punkte)

Für $a \in \mathbb{R}$ sei die lineare Abbildung $\varphi_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi_a(x) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} x.$

a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, daß φ_a nicht bijektiv ist. Berechnen Sie dann für diesen speziellen Wert a eine Matrix B so, daß die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Bx$ als Kern genau Im φ_a hat. Es reicht, wenn Sie eine nicht-Null-Zeile von B angeben.

$a = \boxed{0}$ *(3 Punkte)*, $B = \boxed{5 \;|\; -2 \;|\; -1}$ *(4 Punkte)*

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ wie oben bestimmt. Kreuzen Sie nun denjenigen Vektor für v an, der in Im φ_a liegt, und berechnen Sie für dieses v alle Lösungen von $\varphi_a(x) = v$.

$v = \square \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boxtimes \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *(2 Punkte)*

$\varphi_a^{-1}(v) = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}}$ *(3 Punkte)*

Aufgabe 5. (Typ S, 12 Punkte)

Es sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der Endomorphismus mit $\varphi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1/5 \\ 7/5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -7/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Determinante von φ. *(4 Punkte)*

b) Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bzgl. der Standardbasis an. *(4 Punkte)*

c) Zeigen Sie, daß φ orthogonal ist. *(1 Punkte)*

d) Je nachdem ob φ eine Drehung oder eine Spiegelung ist, bestimmen Sie entweder den Kosinus des Drehwinkels oder bestimmen Sie die Spiegelachse. *(3 Punkte)*

Aufgabe 6. (Typ S, 12 Punkte)

Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$.

a) Ist jeder Eigenvektor von A auch Eigenvektor von A^t? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. *(4 Punkte)*

b) Zeigen Sie: Ist A invertierbar, dann sind alle Eigenwerte ungleich 0. *(4 Punkte)*

c) A heißt **schiefsymmetrisch** wenn $A^t = -A$ gilt. Zeigen Sie: Ist $A \in K^{5 \times 5}$ schiefsymmetrisch, dann ist 0 ein Eigenwert von A. *(4 Punkte)*

Bonus-Aufgabe. (Typ S, 6 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie, daß jedes $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\varphi^2 = \varphi$ diagonalisierbar ist. *(6 Punkte)*
Tip: Bringen Sie Ker φ und Im φ mit den Eigenräumen von φ in Zusammenhang.

Viel Erfolg!

Punktevergabe für Ergebnis-Aufgaben

Aufgabe 3.

1. erster richtiger Eigenwert gibt 2 Punkte
2. jeder weitere richtige Eigenwert gibt 1 Punkt
3. jeder richtige Eigenvektor gibt 1 Punkt
4. T aus Eigenvektoren übertragen (auch folgerichtig aus den v_i) gibt 1 Punkt
5. zwei richtige Einträge in der ersten Spalte von T^{-1} (auch folgerichtig aus T) gibt 1 Punkt
6. dritter richtiger Eintrag in der ersten Spalte von T^{-1} (auch folgerichtig aus T) gibt 1 Punkt
7. Eintrag von A^{999} richtig berechnet (auch folgerichtig aus T und T^{-1}, aber nicht ohne Eintrag in der ersten Spalte von T^{-1}) gibt 2 Punkte

Aufgabe 3.

1. a richtig gibt 3 Punkte
2. zwei Einträge von B richtig gibt 2 Punkt
3. dritter Eintrag von B richtig gibt 2 Punkte
4. v richtig angekreuzt gibt 2 Punkte
5. spezielle Lösung von $\varphi_a(x) = v$ gibt 1 Punkt
6. zwei richtige Einträge in der allgemeinen Lösung von $\varphi_a(x) = 0$ gibt 1 Punkt
7. dritter richtiger Eintrag in der allgemeinen Lösung von $\varphi_a(x) = 0$ gibt 1 Punkt

Notenschlüssel

Punkte	Note
48–50	1.0
45–47	1.3
42–44	1.7
39–41	2.0
36–38	2.3
33–35	2.7
31–32	3.0
29–30	3.3
27–28	3.7
25–26	4.0
24	4.7
1–23	5.0