Klausur zu "Lineare Algebra I für Informatiker", SS 08

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur in Lineare Algebra I

Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 1. (14 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 \\ 2a & -a & -2 \\ 4 & 0 & 2a-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 3}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4$$

mit $a \in \mathbb{Q}$.
Für die ersten beiden Aufgabenteile wird $a := 2$ gesetzt; für die letzten beiden ist $a \in \mathbb{Q}$ beliebig.

a) Bestimmen Sie für $a = 2$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. (4 P.)

b) Geben Sie für $a = 2$ ein $b' \in \mathbb{Q}^4$ so an, daß $Ax = b'$ unlösbar ist. (2 P.)

c) Bestimmen Sie den Rang von A in Abhängigkeit von a. (4 P.)
Tip: Machen Sie die Fallunterscheidung möglichst spät in Ihrer Rechnung. Sie kann z.B. beim Gauß-Verfahren vermieden werden und erst beim Ablesen des Ranges erfolgen.

d) Für welche Werte von a ist $Ax = b$ lösbar? Geben Sie im Fall der Lösbarkeit auch die Anzahl der freien Unbekannten an, ggf. in Abhängigkeit von a. (4 P.)

Aufgabe 2. (9 Punkte)

Es sei $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, der Körper mit 5 Elementen. Diagonalisieren Sie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}.$$

Zu bestimmen ist eine Diagonalmatrix D, die ähnlich zu A ist, sowie eine invertierbare Matrix T über $\mathbb{F}_5$ mit $T^{-1}AT = D$.
Hinweis: Rechnen Sie unbedingt in $\mathbb{F}_5$, denn über $\mathbb{R}$ ist die Matrix nicht diagonalisierbar!

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton und unter Vermeidung jeglicher Matrixmultiplikation nacheinander die Matrizen A^2, A^3, A^6 und A^{1000}.

— bitte wenden —

Aufgabe 4. (8 Punkte)

Wir betrachten im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ (Standard-Skalarprodukt) die Ebene

$$E := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{sowie die Vektoren} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von E. (2 P.)

b) Berechnen Sie die eindeutige Zerlegung $v = v_0 + v_\perp$ mit $v_0 \in E$ und $v_\perp \in E^\perp$. (3 P.)
Probehinweis: v_0 und $v_\perp$ haben ganzzahlige Einträge.

c) Die Ebene E teilt den Raum $\mathbb{R}^3$ in zwei Hälften. Liegen v und w auf derselben Seite oder auf gegenüberliegenden Seiten von E? (3 P.)
Tip: Berechnen Sie auch zu w die Zerlegung $w = w_0 + w_\perp$ mit $w_0 \in E$ und $w_\perp \in E^\perp$.

Aufgabe 5. (8 Punkte)

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad X \mapsto I \cdot X - X \cdot I, \quad \text{wobei } I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie den Kern von φ und geben Sie eine Basis des Kerns an. (4 P.)

b) Berechnen Sie das Bild von φ und geben Sie eine Basis des Bildes an. (4 P.)

Aufgabe 6. (7 Punkte)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$, und sei $U \leq V$ ein Unterraum. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Wenn U φ-invariant ist, so ist U auch φ^2-invariant. (3 P.)
Hinweis: Leicht.

b) Wenn U φ-invariant ist und φ bijektiv, so ist U auch φ^{-1}-invariant. (4 P.)
Hinweis: Nicht so leicht.

Viel Erfolg!