Klausur zu "Lineare Algebra I für Informatiker", SS 09

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 1. (15 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}.$$

a) Wie lautet das charakteristische Polynom von A? (3 P.)

b) Wie lauten die Eigenwerte von A mit ihren algebraischen Vielfachheiten? (4 P.)

c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{Z}_5^3$ aus Eigenvektoren von A. (4 P.)

d) Es sei (a_n) die lineare rekursive Folge in $\mathbb{Z}_5$, definiert durch (4 P.)

$$a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 0 \text{ und } a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} + 3a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für a_n.

Aufgabe 2. (9 Punkte)

Im $\mathbb{R}^4$ seien folgende Vektoren gegeben:

$$v_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $U := \langle v_i - v_j \,|\, 0 \leq i, j \leq 3 \rangle$ und suchen eine Matrix A mit $\mathbb{L}_0(A) = U$.

a) Wie lautet die Dimension von U? (2 P.)

b) Welche Zeilenzahl muss A mindestens haben? (1 P.)

c) Berechnen Sie ein solches A mit minimaler Zeilenzahl. (2 P.)

Weiter ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $Ax = b$ gesucht, für das gilt:

$$v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{L}(A, b).$$

d) Ist die Menge $\mathbb{L}(A, b)$ durch diese Anforderungen eindeutig bestimmt? (3 P.)
Die Antwort ist zu beweisen.

e) Geben Sie ein solches Gleichungssystem $Ax = b$ an. (1 P.)

— bitte wenden —

$\heartsuit$

Aufgabe 3. (15 Punkte)

Es seien $P = \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten, $V = \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ der Unterraum der quadratischen Polynome, und $U = \mathrm{Pol}_1(\mathbb{R})$ der Unterraum der linearen Polynome. Also:

$$V = \{aX^2 + bX + c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\}, \quad U = \{aX + b \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Wir definieren für alle $f, g \in V$:

$$\langle f, g \rangle := \sum_{i=0}^{2} f(i)g(i).$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle , \rangle$ ein Skalarprodukt auf V ist. (4 P.)

b) Erläutern Sie, wie der Abstand $\|f - g\|$ anschaulich anhand der Funktionsgraphen von f und g zu interpretieren ist. (1 P.)

c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\langle , \rangle$ ein Skalarprodukt auf P ist. (1 P.)

Wir statten nun V mit dem soeben definierten Skalarprodukt aus und verwenden es, um quadratische Polynome $f \in V$ durch lineare Polynome aus dem Unterraum U zu approximieren.

d) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von U. (4 P.)

e) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von X^2 auf U. (2 P.)

f) Finden Sie ein normiertes quadratisches Polynom aus $U^\perp$. (3 P.)

Aufgabe 4. (9 Punkte)

Es sei V der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $I := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Wir betrachten den Endomorphismus

$$\varphi : V \to V, \quad X \mapsto I \cdot X \cdot I^{-1}.$$

a) Geben Sie I^{-1} an. (1 P.)

b) Berechnen Sie die Eigenräume von φ zum Eigenwert 1 und zum Eigenwert -1. (5 P.)

c) Bestimmen Sie alle weiteren Eigenwerte von φ. (2 P.)

d) Ist φ diagonalisierbar? (1 P.)

Aufgabe 5. (5 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $\langle , \rangle$ sein Skalarprodukt.

a) Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in V$ gilt: $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$. (3 P.)

b) Erläutern Sie die Aussage aus a) geometrisch. (1 P.)

c) Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in V$ gilt: $\|v + w\| = \|v - w\| \Leftrightarrow v \perp w$. (1 P.)

Viel Erfolg!