Klausur zu "Lineare Algebra I für Informatiker", SS 09

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur

Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Gesamtpunktzahl: 48 P.

Aufgabe 1. (12 Punkte)

Gegeben ist die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat A den Eigenwert a?

b) Für welche Werte a aus Teil a) ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 2. (12 Punkte)

Es sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von V. Weiter sei $\varphi : V \to V$ die lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix $M_\varphi^\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -4 & -7 & -3 \\ 4 & 10 & 6 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren (7 P.)

$$u_1 := v_1 - 2v_2 + 2v_3, \quad u_2 := -2v_1 + 2v_2 - v_3, \quad u_3 := -v_1 + v_2 - v_3$$

eine Basis von V bilden, und berechnen Sie die Abbildungsmatrix von φ bzgl. (u_1, u_2, u_3).

b) Geben Sie Rang und Defekt von φ an, sowie Basen des Kerns und des Bildes. (5 P.)

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Über einem beliebigen Körper K sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Berechnen Sie für $a \neq 0$ eine Matrix X, die $A \cdot X = E_3$ erfüllt. (4 P.)
Hinweis: Hier ist a als Parameter zu behandeln, der auch in X wieder auftreten darf.

Wir betrachten nun die lineare Abbildung $\varphi_a : K^4 \to K^3, x \mapsto Ax$.

b) Für welche $a \in K$ ist φ_a surjektiv? (2 P.)

c) Für welche $a \in K$ besitzt φ_a eine Rechtsinverse? (1 P.)
Hinweis: Eine Rechtsinverse zu $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ meint eine lineare Abbildung ψ mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$.

d) Zeigen Sie, dass in einem endlich-dimensionalen K-Vektorraum allgemein gilt: (3 P.)
Zu jedem $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ existiert ein $\psi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\varphi \circ \psi \circ \varphi = \varphi$.

— bitte wenden —

♡

Aufgabe 4. (7 Punkte)

Wir betrachten die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und den durch A beschriebenen Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie, dass A uneigentlich orthogonal ist. (2 P.)

b) Berechnen Sie den Unterraum aller Fixpunkte von A. (2 P.)
Hinweis: Mit Fixpunkt von A ist ein $x \in \mathbb{R}^3$ gemeint, das $Ax = x$ erfüllt. Es ist eine Basis des gesuchten Unterraumes anzugeben.

c) Begründen Sie, dass A eine Spiegelung beschreibt, und berechnen Sie die Normale zur Spiegelebene. (3 P.)
Hinweis: Die Normale zu einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist diejenige Ursprungsgerade, die orthogonal zur Ebene ist.

Aufgabe 5. (7 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum, d.h. ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Weiter sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ ein orthogonaler Endomorphismus, d.h. für alle $v, w \in V$ gilt $\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$.

a) Zeigen Sie, dass φ ein Isomorphismus von V ist. (3 P.)
Hinweis: Es soll dies „direkt“, d.h. ohne Verwendung von Abbildungsmatrizen, gezeigt werden.

Es sei nun U ein beliebiger φ-invarianter Unterraum von V, d.h. $\varphi(U) \subseteq U$.

b) Zeigen Sie, dass $U^\perp$ invariant unter φ^{-1} ist. (2 P.)

c) Zeigen oder widerlegen Sie: $U^\perp$ ist invariant unter φ. (2 P.)

Viel Erfolg!