7. März 2008

Klausur Mathematische Grundlagen WS 07/08

Prof. Dr. Gabriele Nebe

Name: ________________________________, **Matrikelnummer:** ________________

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Es sei $M := \{7,7,8,7,6,8,7\}$ und $N := \{n \in \underline{10} \setminus \underline{4} \mid n \text{ gerade}\}$. Bestimmen Sie

$$|M|, \quad |N|, \quad M \setminus N, \quad N \setminus M, \quad \mathrm{Pot}(M \cap N), \quad |\mathrm{Pot}(M \cup N)|.$$

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
In einer Urne befinden sich 5 Kugeln, von 1 bis 5 durchnummeriert. Wie viele Möglichkeiten gibt es,

a) 2 Kugeln ohne Zurücklegen und unter Berücksichtigung der Reihenfolge aus der Urne zu ziehen?

b) 3 Kugeln mit Zurücklegen und unter Berücksichtigung der Reihenfolge aus der Urne zu ziehen?

c) 4 Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge aus der Urne zu ziehen?

d) 5 Kugeln mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge aus der Urne zu ziehen?

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*
Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an: $\dfrac{5+i}{3-2i}$.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie die Matrizen AB und BA für

$$A := \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 1 \\ -1 & i & -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}, \qquad B := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \\ -i & 1-i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 2}.$$

Aufgabe 5 *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie zu $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ die Menge $L := \{B \in \mathbb{R}^{3x2} \mid AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.

Aufgabe 6 *(4 Punkte)*
Berechnen Sie in $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$ und stellen Sie die Ergebnisse mit Hilfe von Vertretern aus der Menge $\{0\} \cup \underline{25}$ dar:

$$[250] + [134], \quad [65] \cdot [51], \quad [5]^{2008}, \quad [5]^{-1}.$$

Aufgabe 7 *(4 Punkte)*
Es seien $f := X^4 + X^2 + 1, g := X^3 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$. Berechnen Sie den $\mathrm{ggT}(f,g)$ sowie $a, b \in \mathbb{F}_2[X]$ mit $af + bg = \mathrm{ggT}(f,g)$.

Aufgabe 8 *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die folgende Relation auf $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation ist, und geben Sie die Äquivalenzklassen an (mit Begründung).

$$R := \{\, (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 - y^2 \text{ ist durch 4 teilbar } \}$$

Aufgabe 9 *(4 Punkte)*
Die Abbildungen $f : \underline{4} \to \underline{5}$ und $g : \underline{5} \to \underline{4}$ seien gegeben durch:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c} i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(i) & 2 & 4 & 3 & 5 \end{array}, \qquad \begin{array}{c||c|c|c|c|c} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline g(i) & 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}.$$

Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$, und geben sie an, ob f, g, $f \circ g$ und $g \circ f$ jeweils injektiv/surjektiv/bijektiv sind oder nicht (mit Begründung). Geben Sie im Falle der Bijektivität die Umkehrabbildung an.

Aufgabe 10 *(5 Punkte)*
Finden Sie eine geschlossene Darstellung für die rekursiv definierte Funktion $f := \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(0) := 2,\ f(1) := -1,$$
$$f(k) := 2f(k-2) - f(k-1) \text{ für } k \geq 2.$$