6. März 2008

Klausur Mathematische Grundlagen WS 08/09

Prof. Dr. Gabriele Nebe

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Es seien A und B mathematische Aussagen. Zeigen Sie:

$$(\neg A) \vee (A \wedge B) \iff (\neg A) \vee B.$$

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Es sei $M := \{-3, 4, 5, 6, 5, 4, 4, -3, -3\}$ und $N := \{3n \mid n \in \mathbb{Z}, |n| \leq 2\}$. Bestimmen Sie

$$|M|, \quad |N|, \quad M \setminus N, \quad N \setminus M, \quad \mathrm{Pot}(M \cap N), \quad |\mathrm{Pot}(M \cup N)|.$$

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ durch vollständige Induktion:

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*
In einer Urne befinden sich 6 Kugeln, von 1 bis 6 durchnummeriert. Wie viele Möglichkeiten gibt es,

a) 2 Kugeln mit Zurücklegen und unter Berücksichtigung der Reihenfolge aus der Urne zu ziehen?

b) 3 Kugeln ohne Zurücklegen und unter Berücksichtigung der Reihenfolge aus der Urne zu ziehen?

c) 4 Kugeln mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge aus der Urne zu ziehen?

d) 5 Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge aus der Urne zu ziehen?

Aufgabe 5 *(4 Punkte)*
Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$, und $f : \underline{k} \to \underline{n}$ sei eine injektive Abbildung. Bestimmen Sie die Anzahl der Linksinversen von f.

Aufgabe 6 *(4 Punkte)*
Prüfen Sie die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z},\ x \mapsto x^2$$

auf Injektivität und Surjektivität. Ist φ ein Ringhomomorphismus?

Aufgabe 7 *(4 Punkte)*
Berechnen Sie in $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ und stellen Sie die Ergebnisse mit Hilfe von Vertretern aus der Menge $\{0\} \cup \underline{14}$ dar:

$$[140] + [307], \quad [46] \cdot [85], \quad [2]^{2009}, \quad [2]^{-1}.$$

Aufgabe 8 *(4 Punkte)*
Es seien $f := X^4 + X^2 + X + 1, g := X^3 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$. Berechnen Sie den $\mathrm{ggT}(f,g)$ sowie $a,b \in \mathbb{F}_2[X]$ mit $af + bg = \mathrm{ggT}(f,g)$.

Aufgabe 9 *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie zu $z := \dfrac{4i}{1+i\sqrt{3}}$ die Werte $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ und $|z|$.

Aufgabe 10 *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die folgende Relation auf $\mathbb{C}$ eine Äquivalenzrelation ist, und geben Sie die Äquivalenzklassen sowie ein Vertretersystem an:

$$R := \{ (z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z-w) = 0 \}.$$