Musterlösung zur Klausur Math. Grundlagen am 9.3.2007, Gruppe A

1. (a) $\mathbb{R}$ ist ein Körper, also insbesondere ein Integritätsbereich. Laut Satz 5.11 ist $\mathbb{R}[x]$ dann ebenfalls ein Integritätsbereich. Laut Satz 5.10 besitzt jeder Integritätsbereich einen Quotientenkörper.

   (b) Erste Art: Man errät die Nullstelle 2 des Zählers und die Nullstelle -2 des Nenners.

$$\begin{aligned}(x^3 + x^2 - 5x - 2) : (x - 2) &= x^2 + 3x + 1 \\ (x^3 + 5x^2 + 7x + 2) : (x + 2) &= x^2 + 3x + 1\end{aligned}$$

   Daher ist $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$.
   Zweite Art: Euklidischer Algorithmus liefert
   $\mathrm{ggT}(x^3 + x^2 - 5x - 2, x^3 + 5x^2 + 7x + 2) = x^2 + 3x + 1$.

$$\begin{aligned}(x^3 + x^2 - 5x - 2) : (x^2 + 3x + 1) &= x - 2 \\ (x^3 + 5x^2 + 7x + 2) : (x^2 + 3x + 1) &= x + 2\end{aligned}$$

   Daher ist $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$.

   (c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Injektiv: Sei

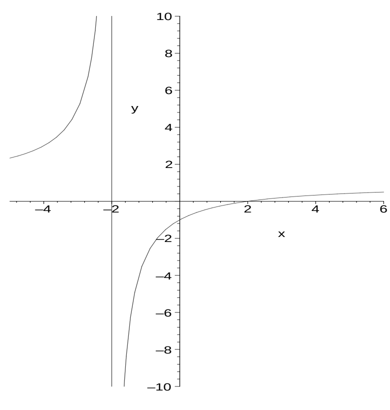
$$\frac{x_1 - 2}{x_1 + 2} = \frac{x_2 - 2}{x_2 + 2}$$

   Dann ist

$$x_1x_2 - 2x_2 + 2x_1 - 4 = x_1x_2 + 2x_2 - 2x_1 - 4$$

   also $4x_1 = 4x_2$, also $x_1 = x_2$. Funktion ist injektiv.
   Surjektiv: Wäre $\frac{x-2}{x+2} = 1$, so wäre $x - 2 = x + 2$, also $-2 = 2$ ↯.
   Funktion ist nicht surjektiv. (Es gilt $\mathrm{Bi}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, siehe Skizze.)

   (d)



2. (a) Es gilt $1+i=\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))$. Daher ist

$$(1+i)^{17}=\sqrt{2}^{17}(\underbrace{\cos(\frac{17\pi}{4})}_{=\cos(\frac{\pi}{4})}+i\underbrace{\sin(\frac{17\pi}{4})}_{=\sin(\frac{\pi}{4})})=\sqrt{2}^{16}(1+i)$$

Also ist $\mathrm{Re}((1+i)^{17})=\sqrt{2}^{16}=2^8=256$.

(b) $x=1.41=\frac{141}{100}$ ist in $\mathbb{Q}$ und es gilt $\sqrt{2}-x=0.0042\ldots$, also ist $|x-\sqrt{2}|<0.01$.

(c) $2007=2\cdot 1003+1$,
$1003=2\cdot 501+1$,
$501=2\cdot 250+1$,
$250=2\cdot 125+0$,
$125=2\cdot 62+1$,
$62=2\cdot 31+0$,
$31=2\cdot 15+1$,
$15=2\cdot 7+1$,
$7=2\cdot 3+1$,
$3=2\cdot 1+1$,
$1=2\cdot 0+1$.
Also ist die Binärdarstellung: 11111010111.

(d) $190747 \bmod 184493=6254$
$184493 \bmod 6254=3127$
$6254 \bmod 3127=0$.
Also ist der ggT gleich 3127.

3. (a) Sei $G = \{e, a, b\}$, wobei e, a, b paarweise verschieden sind. Da e das neutrale Element sein soll, gilt

$$a \star e = e \star a = a, \quad b \star e = e \star b = b, \quad e \star e = e.$$

Betrachten wir jetzt $a \star b$.
Wäre $a \star b = a$, so würde (da a invertierbar) folgen, dass $b = e$ ↯
Wäre $a \star b = b$, so würde (da b invertierbar) folgen, dass $a = e$ ↯
Also gilt $a \star b = e$. Völlig analog zeigt man $b \star a = e$. Also ist $a^{-1} = b$.
Betrachten wir jetzt $a \star a$.
Wäre $a \star a = e$, so wäre $a = a^{-1} = b$ ↯
Wäre $a \star a = a$, so wäre $a = e$ ↯
Also gilt $a \star a = b$. Völlig analog zeigt man $b \star b = a$. Also:

$\star$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

(b) Laut Aufgabe 2 auf Blatt 17 gilt $x^{\mathrm{ord}(x)} = e$, wobei $\mathrm{ord}(x) = |H(x)|$. Laut Aufgabe 6 auf Blatt 19 ist $|H(x)|$ ein Teiler von $|G| = n$. Also gilt $\mathrm{ord}(x) \cdot k = n$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Daher

$$x^n = x^{\mathrm{ord}(x) \cdot k} = \left(x^{\mathrm{ord}(x)}\right)^k = e^k = e.$$

(c) Da 103 eine Primzahl ist, ist $R_{103} = \{0, \ldots, 102\}$ ein Körper. Also ist $G := R_{103} \setminus \{0\}$ eine Gruppe bezüglich der Multiplikation $x \cdot_{103} y = xy \bmod 103$. Diese Gruppe hat $n = 102$ Elemente und das neutrale Element 1. Also gilt $x^{102} \bmod 103 = 1$ für alle $x \in G$, insbesondere für $x = 101$.

4. (a) Ist A durch elementare Zeilenumformungen in I_n überführbar, so gibt es eine invertierbare Matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\begin{aligned} U^{-1}\cdot | \quad UA &= I_n \\ A &= U^{-1} \quad | \cdot U \\ AU &= I_n. \end{aligned}$$

Also ist A invertierbar (mit $A^{-1} = U$).

Zu jedem $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt es laut Satz 6.7 invertierbare Matrizen $U, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$UAV = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ist A invertierbar, so folgt

$$U = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^{-1}A^{-1}.$$

Daran sieht man, dass die letzten $n-r$ Zeilen von U Nullzeilen sind. Da U invertierbar ist, folgt $n = r$. Also $UAV = I_n$ und somit $UA = V^{-1}$ und daher $VUA = I_n$. Da VU ein Produkt elementarer Zeilenumformungsmatrizen ist, kann man A durch elementare Zeilenumformungen in I_n überführen.

(b)

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 9 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 8 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{rrr|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{rrr|ccc} 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|ccc} 3 & -5/2 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Also ist

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(c) Um $P = E_1 \dots E_k$ zu schreiben, wobei E_j Spaltenvertauschungsmatrizen sind, muss man I_4 durch Spaltenvertauschungen in P überführen. Das geht z. B. so: erst Vertauschung $1 \leftrightarrow 4$, dann Vertauschung $1 \leftrightarrow 3$, dann Vertauschung $1 \leftrightarrow 2$. Also

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. (a) Reflexiv: Es gilt $A = I_m A I_n$.

Symmetrisch: Ist $A \sim B$, also $B = UAV$, so ist $U^{-1}BV^{-1} = A$. Da die Inverse einer invertierbaren Matrix invertierbar ist, folgt $B \sim A$.

Transitiv: Ist $A \sim B$ und $B \sim C$, also $B = UAV$ und $C = U_1 B V_1$, so folgt $C = U_1 U A V V_1$. Da das Produkt invertierbarer Matrizen invertierbar ist, folgt $A \sim C$.

(b) Laut Satz 6.7 gibt es zu jedem $A \in K^{m \times n}$ invertierbare Matrizen U, V mit

$$B = UAV = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Also gibt es zu jedem A ein B von dieser Gestalt mit $A \sim B$. Dies beweist, dass zwei Matrizen A_1, A_2 mit demselben Rang r äquivalent sein müssen, denn es gilt dann $A_1 \sim \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim A_2$. Also gibt es höchstens so viele Äquivalenzklassen wie mögliche Werte von r. Da $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$, gilt somit $|K^{m \times n}/\!\sim| \leq \min\{m, n\} + 1$.

6. Es gilt: $(1,1) \prec (1,2) \prec (1,3) \prec \ldots \prec (2,1) \prec (2,2) \prec (2,3) \prec \ldots$

(a) Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}^2$ und

$$N = \{m \mid \exists n : (m,n) \in M\}.$$

Dann ist N eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$. Diese besitzt laut Wohlordnungssatz ein kleinstes Element, etwa m^*. Da $m^* \in N$ ist

$$P = \{n \mid (m^*, n) \in M\}$$

eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$. Diese besitzt ein kleinstes Element, etwa n^*. Dann ist $(m^*, n^*) \in M$ das bezüglich $\preceq$ kleinste Element von M, denn für jedes $(p,q) \in M$ gilt $p \in N$ und somit $m^* \leq p$. Falls $m^* = p$, so ist $q \in P$ und somit $n^* \leq q$. Also gilt $(m^*, n^*) \preceq (p,q)$.

(b) Nicht notwendig: Das obige Beispiel ist eine Wohlordnung, aber

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid (m,n) \prec (2,1)\} = \{(1,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist nicht endlich.

Hinreichend: Wenn jedes Element $x \in M$ nur endlich viele “Vorgänger” (also $y \in M$ mit $y \prec x$) hat, kann man keine unendliche strikt absteigende Folge $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ \ldots$ von Elementen von M bilden.