Musterlösung zur Klausur Math. Grundlagen am 29.3.2007

1. (a)

$n \bmod 5 = 0 \Rightarrow n^2 \bmod 5 = 0 \bmod 5 = 0$
$n \bmod 5 = 1 \Rightarrow n^2 \bmod 5 = 1 \bmod 5 = 1$
$n \bmod 5 = 2 \Rightarrow n^2 \bmod 5 = 4 \bmod 5 = 4$
$n \bmod 5 = 3 \Rightarrow n^2 \bmod 5 = 9 \bmod 5 = 4$
$n \bmod 5 = 4 \Rightarrow n^2 \bmod 5 = 16 \bmod 5 = 1$

Ist also $n^2 \bmod 5 = 0$, so muss $n \bmod 5 = 0$ gelten.

(b) Angenommen, $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Wir dürfen oBdA annehmen: $m, n \in \mathbb{N}$ und teilerfremd. Dann ist $5n^2 = m^2$, also ist m^2 durch 5 teilbar. Laut (a) ist dann auch m durch 5 teilbar. Also $m = 5\mu$ für ein μ. Dann ist $5n^2 = (5\mu)^2 = 25\mu^2$, was $n^2 = 5\mu^2$ impliziert. Also ist n^2 durch 5 teilbar und somit auch laut (a) auch n. Nun sind sowohl m als auch n durch 5 teilbar, was im Widerspruch zur angenommenen Teilerfremdheit steht.

(c) Es ist klar, dass K nicht der Nullring ist, denn K enthält $\mathbb{Q}$.

Zu zeigen ist also: $a + b\sqrt{5} \neq 0 \Rightarrow \exists c, d \in \mathbb{Q}$ mit $(a + b\sqrt{5})(c + d\sqrt{5}) = 1$.

Sei $a + b\sqrt{5} \neq 0$ gegeben. Dann ist $(a, b) \neq (0, 0)$. Daraus folgt

$$a^2 - 5b^2 \neq 0.$$

Denn: Sei $a^2 - 5b^2 = 0$. Ist $b = 0$, so folgt $a = 0$, also $(a, b) = (0, 0)$. Ist $b \neq 0$, so folgt $5 = \frac{a^2}{b^2}$ und somit $\sqrt{5} = \frac{|a|}{|b|} \in \mathbb{Q}$ $\lightning$.

Also ist

$$\frac{a - b\sqrt{5}}{a^2 - 5b^2} = \frac{a}{a^2 - 5b^2} + \frac{-b}{a^2 - 5b^2}\sqrt{5} \in K$$

und es gilt

$$(a + b\sqrt{5})\frac{a - b\sqrt{5}}{a^2 - 5b^2} = 1.$$

2. Es muss gelten

$$\begin{aligned} x &= 56q + 29 \\ x &= 57p + 34 \end{aligned}$$

für $p, q \in \mathbb{N}_0$. Erste Gleichung mal 57 minus zweite Gleichung mal 56 liefert

$$x = 56 \cdot 57(q - p) + 57 \cdot 29 - 56 \cdot 34 = 3192(q - p) - 251.$$

Den kleinsten Wert von x in $\mathbb{N}$ erhält man für $q - p = 1$, dann ist

$$x = 2941.$$

Den zweitkleinsten Wert erhält man für $q - p = 2$, dann ist

$$x = 6133.$$

3. Laut Aufgabe 3 auf Blatt 25 ist die Matrix A genau dann invertierbar, wenn

$$3(\lambda+9)-(\lambda+2)(\lambda+1)\neq 0,$$

also wenn $25-\lambda^2\neq 0$ bzw. $\lambda\notin\{\pm 5\}$.

1. Fall: $\lambda\notin\{\pm 5\}$: A invertierbar, daher $Ax=b$ eindeutig lösbar ($x=A^{-1}b$).

2. Fall: $\lambda=5$. Es ergibt sich

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 14 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix},$$

was keine Lösung hat.

3. Fall: $\lambda=-5$. Es ergibt sich

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix},$$

was mehrere Lösungen hat, zum Beispiel $x_1=2, x_2=0$ oder $x_1=0, x_2=-1.5$.

Anderer Zugang, über Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{cc|c} 3 & \lambda+1 & 6 \\ \lambda+2 & \lambda+9 & -6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{\lambda+1}{3} & 2 \\ \lambda+2 & \lambda+9 & -6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{\lambda+1}{3} & 2 \\ 0 & \frac{25-\lambda^2}{3} & -2\lambda-10 \end{array}$$

Auch hier sieht man: $25-\lambda^2\neq 0\Rightarrow$ eindeutige Lösung. Für $\lambda=5$ ist $-2\lambda-10\neq 0$, also gibt es keine Lösung. Für $\lambda=-5$ ist $-2\lambda-10=0$, also gibt es mehrere Lösungen.

4. Man muss die Partitionen einer vierelementigen Menge abzählen (siehe Aufgabe 1 auf Blatt 22).

   1. Fall: Partition in 1 Teilmenge: 1 Möglichkeit

   2. Fall: Partition in 2 Teilmengen: 7 Möglichkeiten (laut Aufgabe 2 auf Blatt 22)

   3. Fall: Partition in 3 Teilmengen: Da $4 = 2+1+1$ die einzige Möglichkeit ist, 4 als Summe dreier natürlicher Zahlen zu schreiben, muss eine Teilmenge 2 Elemente haben, die anderen beiden je 1.

   Es gibt daher genau so viele Partitionen in 3 Teilmengen, wie Möglichkeiten, 2 Elemente aus 4 auszuwählen. Das sind $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ Möglichkeiten.

   4. Fall: Partition in 4 Teilmengen: 1 Möglichkeit

   Insgesamt gibt es also 1+7+6+1=15 Partitionen bzw. 15 Äquivalenzrelationen auf einer Menge mit 4 Elementen.

5. (a) $f(xy) = (xy)^3 = xyxyxy = x^3y^3 = f(x)f(y)$ wegen Kommutativität

   $f(x+y) = (x+y)^3 = x^3 + x^2y + xyx + yx^2 + xy^2 + yxy + y^2x + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 = f(x) + f(y)$ wegen Kommutativität und $3 = 1 + 1 + 1 = 0$

   $f(1) = 1^3 = 1$

   (b) Für Injektivität genügt es zu zeigen (laut Aufgabe 4 auf Blatt 15): $x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$.

   Sei $x^3 = x \cdot x^2 = 0$. Da R Integritätsbereich, folgt $x = 0$ oder $x^2 = 0$. Aber aus $x^2 = x \cdot x = 0$ folgt, wieder wegen "Integritätsbereich", dass $x = 0$. Also gilt in jedem Fall $x = 0$.

6.

$$
\begin{array}{rrrrrcrrrrcl}
(2z^4 & +5z^3 & +15z^2 & +17z & +10) & : & (2z^3 & +13z^2 & +17z & +10) & = & z-4 \\
2z^4 & +13z^3 & +17z^2 & +10z & & & & & & & & \\
\hline
 & -8z^3 & -2z^2 & +7z & +10 & & & & & & & \\
 & -8z^3 & -52z^2 & -68z & -40 & & & & & & & \\
\hline
 & & +50z^2 & +75z & +50 & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrcrrrcl}
(2z^3 & +13z^2 & +17z & +10) & : & (50z^2 & +75z & +50) & = & \frac{1}{25}z+\frac{1}{5} \\
2z^3 & +3z^2 & +2z & & & & & & & \\
\hline
 & 10z^2 & +15z & +10 & & & & & & \\
 & 10z^2 & +15z & +10 & & & & & & \\
\hline
 & & & 0 \text{ R.} & & & & & &
\end{array}
$$

Also ist der ggT das Polynom $50z^2 + 75z + 50 = 25(2z^2 + 3z + 2)$ bzw. $2z^2 + 3z + 2$.

Zu lösen ist also (laut Aufgabe 2 auf Blatt 23)

$$z^2 + \frac{3}{2}z + 1 = 0,$$

was

$$z_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm i\frac{\sqrt{7}}{4}$$

ergibt.