Prof. Dr. Eva Zerz
Dipl.-Math. Christian Weber

WS 2010/11

Mathematische Grundlagen

Nachholklausur am 24. März 2011

Denken Sie daran, alle Ihre Behauptungen ausreichend zu begründen und Rechenwege nachvollziehbar zu dokumentieren.

Aufgabe 1. *(3 Punkte)*
Es seien A und B mathematische Aussagen. Zeigen Sie:

$$(A \vee \neg(A \vee B)) \iff ((\neg B) \vee (A \wedge B)).$$

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Es seien $M := \{-3,-3,-5,0,-3,0,-5,-3,5,-3,0\}$ und $N := \{2n-1 \mid n \in \mathbb{Z}, |n| \leq 2\}$. Bestimmen Sie

$$|M|, \quad |N|, \quad (M \setminus N) \times (N \setminus M), \quad \mathrm{Pot}(M \cap N), \quad |\mathrm{Pot}(M \cup N)|.$$

Aufgabe 3. *(3 Punkte)*
Es seien $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Familien von Teilmengen von $\mathbb{R}$, wobei $M_0 = \emptyset$ und

$$N_n := M_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} M_i$$

ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n.$$

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion nach m für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

Aufgabe 5. *(4 Punkte)*
Prüfen Sie, ob 170 in $\mathbb{Z}_{251}$ invertierbar ist, und geben Sie gegebenenfalls das Inverse an.

Aufgabe 6. *(4 Punkte)*
Die Relation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ sei definiert durch

$$x \sim y :\iff x^2 - y^2 \text{ ist durch 3 teilbar.}$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Bestimmen Sie ein Vertretersystem von $\mathbb{Z}$ bezüglich $\sim$.

Aufgabe 7. *(4 Punkte)*
Auf $\mathbb{C}$ sei die Relation $\preceq$ definiert durch

$$z \preceq w :\Longleftrightarrow \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(w) \text{ und } \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Im}(w).$$

Zeigen Sie, dass $\preceq$ eine Ordnung ist. Ist $\preceq$ eine Totalordnung?

Aufgabe 8. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie zu

$$z := \frac{1 - i \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$$

die Werte $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $\bar{z}$, $|z|$ und z^{-1}. (Geben Sie Letzteres in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.)

Aufgabe 9. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie das Inverse der folgenden Matrix über $\mathbb{Q}$.

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

Aufgabe 10. *(3+2+1 Punkte)*
Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und

$$M := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i = j\}.$$

a) Zeigen Sie, dass jedes $A \in M$ invertierbar ist und dass M eine Untergruppe der invertierbaren Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

b) Prüfen Sie die Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad A \mapsto \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$$

auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

c) Zeigen Sie, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist (bezüglich Matrixmultiplikation bzw. Multiplikation in $\mathbb{R}$).