Endliche Spiegelungsgruppen

Oliver Braun - Abschnitte 1.11 bis 1.16

Poincaré-Polynome

Bezeichnung: W Spiegelungsgruppe definiert durch das einfache System $\Delta \subseteq \Phi$.
$I \subseteq S := \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$, $W_I := \langle I \rangle \leq W$, $W^I := \{w \in W \mid \ell(ws) > \ell(w) \ \forall \ s \in I\}$

Definition $a_n := |\{w \in W \mid \ell(w) = n\}|$, $W(t) := \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \sum_{w \in W} t^{\ell(w)} \in \mathbb{Z}[t]$
$W(t)$ heißt Poincaré-Polynom von W. $X \subseteq W: \ X(t) := \sum_{w \in X} t^{\ell(w)}$

Bemerkung *$W(t) = W_I(t) W^I(t)$ (folgt direkt aus (1.10)).*

Proposition *Schreibe $(-1)^I := (-1)^{|I|}$ und $N := |\Pi|$. Dann*
$$\sum_{I \subseteq S} (-1)^I \frac{W(t)}{W_I(t)} = \sum_{I \subseteq S} (-1)^I W^I(t) = t^N$$

Fundamentalbereiche

Wähle festes positives System Π mit einfachem System Δ. Zu jedem H_α definiere die offenen Halbräume
$A_\alpha := \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) > 0\}, \ A'_\alpha := -A_\alpha$
$C := \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$
$D := \overline{C} = \bigcap_{\alpha \in \Delta} (H_\alpha \cup A_\alpha) = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) \geq 0 \ \forall \ \alpha \in \Delta\}$

Lemma *Jedes $\lambda \in V$ liegt in der Bahn eines $\mu \in D$, $\mu - \lambda$ ist nichtnegative $\mathbb{R}$-Linearkombination von Δ.*

Satz

1. *$w\lambda = \mu$ mit $\lambda, \mu \in D \Rightarrow \mu = \lambda$, dann ist w das Produkt einfacher Spiegelungen, die λ festlassen.*
   $\lambda \in C \Rightarrow \mathrm{Stab}_W(\lambda) = \{1\}$
2. *D ist ein Fundamentalbereich der Operation von W auf V.*
3. *$\lambda \in V$: $\mathrm{Stab}_W(\lambda) = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi, \ s_\alpha \in \mathrm{Stab}_W(\lambda) \rangle$*

4. $U \subseteq V$*:* $\mathrm{Stab}_W(U) = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi,\ s_\alpha \in \mathrm{Stab}_W(U)\rangle$ *(gemeint ist die Untergruppe, die* U *punktweise festlässt).*

Parabolische Untergruppen, Spiegelungen

Proposition $\mathrm{Pot}(S) \to \{U \leq W \mid U \text{ parabolisch}\},\ I \mapsto W_I$ *ist ein Verbandsisomorphismus.*

Proposition *Jede Spiegelung in* W *ist von der Form* s_α *mit* $\alpha \in \Phi$*.*

Der Coxeter-Komplex, eine alternierende Summenformel

Δ festes einfaches System, S zugehörige einfache Spiegelungen; Annahme: $\langle\Delta\rangle = V$. D Fundamentalbereich der Operation von W auf V wie zuvor.
Für $I \subseteq S$ definiere

$$C_I := \{\lambda \in D \mid (\lambda,\alpha) = 0\ \forall\ \alpha \in \Delta_I,\ (\lambda,\alpha) > 0\ \forall\ \alpha \in \Delta - \Delta_I\}$$

$\mathcal{C} := \{wC_I \mid w \in W,\ I \subseteq S\}$ heißt der Coxeter-Komplex von W, die wC_I heißen Seitenflächen vom Typ I.

Proposition *Für jedes* $I \subseteq S$ *ist* $\mathrm{Stab}_W(C_I) = W_I$*. Die parabolischen Untergruppen von* W *sind also die Stabilisatoren der Elemente von* $\mathcal{C}$*.*

Jetzt: $H_1, ..., H_r$ Hyperebenen in einem euklidischen Raum, definiere Komplex $\mathcal{K}$ wie zuvor.
Jede Hyperebene $H = H^0$ definiert einen positiven Halbraum H^+ und einen negativen Halbraum H^-.
Ein Element von $\mathcal{K}$ hat dann die Gestalt $K = \bigcap_i H_i^{\varepsilon_i},\ \varepsilon_i \in \{0,+,-\},\ K \neq \emptyset$, $\dim K := \dim\langle K\rangle_{\mathbb{R}}$.

Lemma *Sei* n_i *die Anzahl der* i*-dimensionalen Elemente von* $\mathcal{K}$*. Dann* $\sum_i (-1)^i n_i = (-1)^n$

Fixiere Δ und S wie zuvor. Sei $f_I(w)$ die Anzahl der Seitenflächen vom Typ I (diese sind von der Form vC_I), die von w festgelassen werden.

Proposition

$$\sum_{I \subsetneq S} (-1)^{|I|} f_I(w) = \det(w)$$