Die Bruhat-Ordnung

Oliver Braun - Abschnitte 5.9 bis 5.11

Wie zuvor: $T = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Phi\} = \bigcup_{w \in W} wSw^{-1}$
Erinnerung: $|T| = |\Phi^+|$

Definition $w' \to w :\Leftrightarrow \ \exists\ t \in T \ : \ w = w't,\ \ell(w) > \ell(w')$

Definition $w' < w :\Leftrightarrow \ \exists$ *Folge* $w' = w_0 \to w_1 \to ... \to w_m = w$
Damit ist $\leq$ eine partielle Ordnung auf W, die mit ℓ verträglich ist. Das eindeutige minimale Element ist $1 \in W$.
$\leq$ heißt die ***Bruhat-Ordnung*** *auf W.*

Bemerkung *Die Definition von $\to$ ist eine* ***zweiseitige*** *Definition:*
$w = w's_\alpha,\ \ell(w) > \ell(w')$.
$\beta := w'(\alpha) \Rightarrow (w')^{-1}s_\beta w' = s_\alpha \Rightarrow w = s_\beta w'$

Bemerkung *Die* ***Längendifferenz*** *in $w' \to w$ ist ungerade, aber nicht unbedingt 1. Dies folgt aus den Eigenschaften von ℓ, die in §2 vorgestellt wurden.*

Teilwörter

Wichtige Charakterisierung der Bruhat-Ordnung: Sei $w = s_1 s_2 ... s_r$ ein reduziertes Wort. Dann ist ein Teilwort ein Produkt, das durch Auslassen endlich vieler s_i entstehen. Ein solches Teilwort ist möglicherweise leer und nicht notwendigerweise reduziert.

Satz *Sei $w = s_1 ... s_r$ reduziert. Dann:*

$$w' \leq w \Leftrightarrow w' \text{ ist ein Teilwort dieses reduzierten Produkts}$$

Korollar 0.1 *Sei $I \subseteq S$. Die Bruhat-Ordnung von W stimmt auf W_I mit der Bruhat-Ordnung der Coxeter-Gruppe W_I überein.*

Intervalle

Dieses Lemma ist im Beweis der folgenden Proposition nützlich.

Lemma *Sei $w' < w$ und $\ell(w) = \ell(w') + 1$. Falls ein $s \in S$ mit $w' < w's$ und $w's \neq w$ existiert, dann gilt sowohl $w < ws$ als auch $w's < ws$.*

Proposition *Sei $w' < w$. Dann existieren $w_0, ..., w_m \in W$ mit*

$$w' = w_0 < w_1 < ... < w_m = w,\ \ \ell(w_i) = \ell(w_{i-1}) + 1 \ \forall\ 1 \leq i \leq m$$