Coxeter-Gruppen und BN-Paare

Oliver Braun und Sebastian Schönnenbeck

Seminar zur Gruppentheorie - 06.02.2013

1 Kapitel 8 aus „Reflection Groups and Coxeter Groups“ (J.E. Humphreys)

Das Wortproblem

Methode von Tits
Sei $F := F(\Sigma)$ die freie Gruppe auf einer Menge Σ, $\Sigma \to S$ eine Bijektion und $\pi : F \twoheadrightarrow W$ der zugehörige Epimorphismus.
Sei F^+ das von Σ erzeugte Monoid.
$s^2 = 1 \ \forall \ s \in S \Rightarrow$ es gibt einen Monoidepimorphismus $F^+ \twoheadrightarrow W$.
$\omega \in F^+$ Produkt einiger $\sigma \in \Sigma$: definiere $\ell(\omega)$ als Anzahl der Faktoren in diesem Produkt.

Elementare Vereinfachungen

1. In einem Wort ω ein Produkt wie oben durch das „umgekehrte Produkt“ ersetzen. Dies lässt die Länge $\ell(\omega)$ fest.

2. In einem Wort ω ein Produkt der Form $\sigma\sigma$ auslassen. Dies verringert $\ell(\omega)$.

Definition $\Sigma(\omega) := \{x \in F^+ \mid x \textit{ entsteht aus } \omega \textit{ durch (1) oder (2)}\}$, $|\Sigma(\omega)| < \infty$, $|\pi(\Sigma(\omega))| = 1$.

Satz $\omega,\ \omega' \in F^+$. $\pi(\omega) = \pi(\omega') \Leftrightarrow \Sigma(\omega) \cap \Sigma(\omega') \neq \emptyset$
$\pi(\omega) = 1 \Leftrightarrow (\ ) \in \Sigma(\omega)$ *[( ) das leere Wort]*

2 BN-Paare

2.1 Die Axiome

Definition 2.1 *Sei G eine Gruppe und $B, N \leq G$. Dann heißt (B, N) ein $BN-$Pair für G, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:*

1. $G = \langle B, N \rangle$

2. $B \cap N =: H \triangleleft N$

3. *Zu $W := N/H$ existiert eine Menge $S \subset W$, sodass (W, S) ein Coxetersystem bildet.*

4. *Ist $s_i = n_i H$ und $n \in N$, so ist $n_i B n_i \neq B$ und $n_i B n \subset (B n_i n B) \cup (BnB)$*

Jede zu B konjugierte Gruppe heißt Borel-Untergruppe, W heißt die Weyl-Gruppe, $|S|$ heißt der Rang des $BN-$Pairs.

Bemerkung 2.2 *Das dritte Axiom lässt sich abschwächen zu „W hat ein Erzeugendensystem von Elementen der Ordnung 2“.*

Bemerkung 2.3 *Ist G eine Gruppe mit einem $BN-$Pair, so gilt zusätzlich zum vierten Axiom auch: $nBn_i \subset (Bnn_iB) \cup (BnB)$. Insbesondere kann das vierte Axiom (aus Symmetriegründen) durch die Forderung ersetzt werden.*

Lemma 2.4 *Seien $w, w', w'' \in W$, dann gilt: $BwB \subset (Bw'B)(Bw''B) \Leftrightarrow Bw'B \subset (BwB)(Bw''^{-1}B) \Leftrightarrow Bw''B \subset (Bw'^{-1}B)(BwB)$.*

Beispiel 2.5 *G operiere treu und doppelt transitiv auf der Menge Ω mit $|\Omega| > 2$ und seien $\alpha \neq \beta \in \Omega$ beliebig. Setze $B := G_\alpha$ und $N := G_{\{\alpha,\beta\}}$. Dann bildet (B, N) ein $BN-$Pair vom Rang 1 für G.*

2.2 Die Bruhat-Zerlegung

Satz 2.6 *Ist (B, N) ein $BN-$Pair für G, so ist $G = BNB$.*

Bemerkung 2.7 *Für $w \in W$ bezeichne BwB die Doppelnebenklasse BnB für ein $n \in N$ mit $nH = w$ (diese hängt nicht von der Wahl von n ab). Es gilt:*

1. $G = BWB$

2. *Für $w, w' \in W$ gilt: $BwB = Bw'B \;\Leftrightarrow\; w = w'$.*

3. *W steht in Bijektion zu den Doppelnebenklassen von B auf G. $G = \coprod_{w \in W} BwB$*

Lemma 2.8 *Es sei $s_i \in S$ und $w \in W$, dann gilt:*
$(Bs_iB)(BwB) = \begin{cases} Bs_iwB, & \ell(s_iw) \geq \ell(w) \\ (Bs_iwB) \cup (BwB), & \ell(s_iw) \leq \ell(w) \end{cases}.$

2.3 Parabolische Untergruppen

Bemerkung 2.9 *Ist (W, S) ein Coxetersystem, so heißen die Untergruppen $W_I := \langle s_i \mid i \in I \rangle$ mit $I \subset S$ die parabolischen Untergruppen von W.*

Lemma 2.10 *Ist G eine Gruppe mit einem $BN-$Pair (B, N) und (W, S) das zugehörige Coxetersystem, so ist $BW_IB \leq G$.*

Definition 2.11 *Sei G wie oben.*

1. *Eine Untergruppe $U \leq G$ heißt parabolische Untergruppe von G, falls U eine Konjugierte von B enthält.*

2. *Die Untergruppen $P_I := BW_IB$, $I \subset S$ heißen standard parabolische Untergruppen.*

Satz 2.12 *ℓ bezeichne die übliche Längenfunktion von W bezüglich S. Ist $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n \in W$ mit $\ell(w) = n$, so ist die kleinste Unterruppe von G, die BwB enthält, gerade BW_IB mit $I = \{s_1, \ldots, s_n\}$.*

Korollar 2.13 *Jede Untergruppe von G, die B enthält ist von der Gestalt BW_IB mit $I \subset S$.*

Satz 2.14 *Ist $I \subset S$ und $N_I \leq N$ so, dass $N_I/H = W_I$, so ist BN_IB wieder eine Gruppe mit $BN-$Pair (B, N_I). Insbesondere gilt $BN_IB = BW_IB = \coprod_{w \in W_I} BwB$.*

2.4 BN-Paare und einfache Gruppen

Satz 2.15 *Jede endliche Gruppe vom Lie-Typ hat die Struktur eines BN-Pairs.*

Satz 2.16 *Es sei G eine endliche perfekte Gruppe mit einem BN-Pair, sodass B auflösbar ist, $\cap_{g \in G} {}^gB = \{1\}$ und W irreduzibel (zusammenhängendes Dynkindiagramm), dann ist G einfach.*

3 BN-Paare für $\mathrm{GL}(V)$ und $\mathrm{Sp}(V)$

3.1 GL(V)

$G := \mathrm{GL}_n(K) \cong \mathrm{GL}(V)$
$B := \{X \in G \mid X_{ij} = 0 \ \forall\ i > j\}$
$N := \{A \in G \mid A \text{ Monomialmatrix}\}$

Satz *(B, N) ist ein BN-Paar für G.*

3.2 Sp(V)

Definition *Sei V ein e.e. K-Vektorraum, β eine nicht ausgeartete alternierende Bilinearform auf V ($\beta(v, v) = 0 \ \forall\ v \in V$, $V^\perp = \{0\}$). Dann heißt (V, β)* ***symplektischer Raum****.*
$\mathrm{Sp}(V) := \{f \in \mathrm{GL}(V) \mid \beta(f(v), f(w)) = \beta(v, w) \ \forall v, w \in V\}$
$\dim(V) \equiv 0 \pmod 2$.

Lemma *Es existiert eine Basis $(e_1, f_1, e_2, f_2, ..., e_n, f_n)$ von V mit $\beta(e_i, e_j) = \beta(f_i, f_j) = 0$, $\beta(e_i, f_j) = \delta_{ij}$. Eine solche Basis heißt* ***symplektische Basis****.*
Paarweise orthogonale $(e_1, ..., e_n)$ lassen sich zu einer symplektischen Basis ergänzen.

Bemerkung *Bezüglich einer symplektischen Basis hat die Darstellungsmatrix von β die Gestalt $J := \begin{pmatrix} 0 & Q \\ -Q & 0 \end{pmatrix}$ mit $Q = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$ Es gilt $A \in \mathrm{Sp}(V) \Leftrightarrow A^{tr} \in \mathrm{Sp}(V)$.*

Bezüglich der symplektischen Basis setze $B := B_{\mathrm{GL}(V)} \cap \mathrm{Sp}(V)$, $N := N_{\mathrm{GL}(V)} \cap \mathrm{Sp}(V)$

Satz *(B, N) ist ein BN-Paar für $\mathrm{Sp}(V)$.*

Lemma *Sei $H := B \cap N$. Dann ist $H \trianglelefteq N$ und $N/H =: W \cong C_2 \wr S_n$ wird von Elementen $\{w_i \mid i \in I\}$ der Ordnung 2 erzeugt.*