Seminar Gruppentheorie
unter Leitung von Alice Niemeyer
RWTH Aachen

Endliche Untergruppen von $O(\mathbb{R}^2)$ und $O(\mathbb{R}^3)$

Simon Bürger

16. November 2012

Inhaltsverzeichnis

In diesem Vortrag werden die endlichen Untergruppen der orthogonalen reellen Transformationen in Dimension zwei und drei klassifiziert.

1 Allgemeine Bemerkungen

In diesem Vortrag, wie auch in den folgenden in diesem Seminar, geht es um Gruppen von orthogonalen Transformationen auf euklidischen Räumen. Dazu zunächst ein paar Begriffe.

Definition 1.1 *[2] Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und t ein linearer Operator auf V.*

- *t heißt orthogonal, falls für alle $x, y \in V$ gilt: $(tx, tx) = (x, y)$, also Längen erhalten bleiben unter t. Die Gruppe aller orthogonalen Operatoren auf V bezeichnen wir als $O(V)$.*
- *t heißt Spiegelung, falls es ein $0 \neq \alpha \in V$ gibt, sodass*

$$tx = x - 2\frac{(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$$

  für alle $x \in V$ ist. Den Vektor α nennt man Normalenvektor und da er nur bis auf Vielfachheit bestimmt ist, nimmt man oft oBdA an, dass er normiert sein möge. Man sieht leicht, dass eine Spiegelung immmer orthogonal ist.
- *t heißt Rotation falls es als Produkt von zwei Spiegelungen darstellbar ist. Dies ist äquivalent zu $\det(t) = 1$. Die Gruppe aller Rotationen bezeichnen wir $SO(V)$.*

Der Rest dieses Vortrags beschränkt sich auf den Fall $V = \mathbb{R}^2$ und $V = \mathbb{R}^3$ mit Standard-Skalarprodukt.

2 Transformationen in zwei Dimensionen

Bemerkung 2.1 *Sei $t \in O(\mathbb{R}^2)$. Sei $(a,b)^T := t(1,0)^T$. Da t Längen erhält, ist $a^2+b^2 = 1$. Folglich gibt es ein eindeutiges $\vartheta \in [0, 2\pi)$ mit $a = \cos(\vartheta)$ und $b = \sin(\vartheta)$.*

Da t außerdem Orthogonalität erhält, ist entweder

$$t \quad = \quad r(\vartheta) := \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

eine Rotation um den Winkel ϑ mit $\det(t) = 1$ und $r(\vartheta)^k = r(k\vartheta)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Oder es ist

$$t \quad = \quad \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

eine Spiegelung mit Normalenvektor $(\cos(\frac{\vartheta}{2}), \sin(\frac{\vartheta}{2}))^T$ sowie $\det(t) = -1$ und $t^2 = 1$.

2.1 Klassifikation der endlichen orthogonalen Gruppen

Satz 2.2 *Sei $G \leq O(\mathbb{R}^2)$ endlich. Dann ist G entweder isomorph zur zyklischen Gruppe C_n oder zur Diedergruppe D_{2n} für ein $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Sei $H \leq G$ die Rotationsuntergruppe von G. Wir werden zunächst zeigen, dass H bereits zyklisch sein muss. Falls $|H| = 1$, ist dies bereits klar. Andernfalls sei $\vartheta \in (0, 2\pi)$ minimal mit $r := r(\vartheta) \in H$.

Sei nun $r' := r(\varphi) \in H$ beliebig (also $\varphi \in [0, 2\pi)$). Nun gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $\varphi \in [k\vartheta, (k+1)\vartheta)$. Dann ist $\varphi - k\vartheta \in [0, \vartheta)$, und $r(\varphi - k\vartheta) = r'r^{-k} \in H$.

Da ϑ minimal gewählt war, muss damit $r' = r^k$ sein. Damit ist H zyklisch, also $H \cong C_n$ mit $n := |H|$, und insbesondere is $\vartheta = \frac{2\pi}{n}$.

Falls nun $H = G$ ist, so sind wir fertig. Andernfalls sei $s \in G \backslash H$, also eine Spiegelung. Für jede weitere Spiegelung $s' \in G \backslash H$ gilt nun:

$$\begin{aligned} & \det(ss') = \det(s)\det(s') = (-1)(-1) = 1 \\ \Rightarrow \quad & ss' \in H \Rightarrow s' \in sH \end{aligned}$$

Damit ist sH die einzige nicht-triviale Nebenklasse von H in G. Außerdem ist rs wieder eine Spiegelung, also $(rs)^2 = 1$, womit wir folgende Präsentation haben

$$G = H \cup sH = \langle r, s | s^2, r^n, (rs)^2 \rangle$$

Dies ist die Diedergruppe D_{2n}. □

3 Transformationen in drei Dimensionen

Lemma 3.1 *Sei $t \in O(\mathbb{R}^3)$. Dann gibt es ein $\vartheta \in [0, 2\pi)$ und eine Orthonormalbasis $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^3)^3$ bezüglich der*

$$t = \begin{pmatrix} \det(t) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

ist. Das heißt $t|_{\langle x \rangle} = \pm 1$ ist die Identität oder eine Spiegelung, und $t_{|\langle y,z \rangle}$ ist eine Drehung um ϑ.

Beweis: Seien $a, b, c \in S^1 \subset \mathbb{C}$ die Eigenwerte von t. Da das charakteristische Polynom von t reell ist gibt es (nach Umsortierung) folgende Fälle:

1. $a, b, c \in \mathbb{R}$, also $a, b, c \in \{\pm 1\}$: Wegen $\det(t) = abc$ ist mindestens ein Eigenwert gleich $\det(t)$. OBdA sei dies a.
2. $a \in \mathbb{R}, b = \bar{c} \notin \mathbb{R}$: Mit $bc = c\bar{c} = 1$ folgt $a = \det(t)$.

In jedem Fall ist $a = \det(t)$ ein Eigenwert von T. Sei nun $x \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ein normierter Eigenvektor dazu, und y, z so, dass (x, y, z) eine Orthonormalbasis bilden.
Damit haben wir nun $t\langle x \rangle \subset \langle x \rangle$ und $t|_{\langle x \rangle} = \det(t) \cdot \mathrm{id}_{\langle x \rangle}$.
Außerdem gilt

$$(ty, x) = (y, t^T x) = (y, \det(t)x) = \det(t)(y, x) = 0$$

und analog für z woraus folgt

$$t\langle y, z \rangle \subset \langle x \rangle^\perp = \langle y, z \rangle$$

außerdem ist $\det(T|_{\langle y,z \rangle}) = bc = 1$, womit $t|\langle y, z \rangle$ laut Bemerkung 2.1 eine Rotation in der Ebene ist. Damit ist die Wirkung von T vollständig beschrieben. □

Beispiel 3.2 *Jede zyklische Rotationsgruppe $C_n \in SO(\mathbb{R}^2)$ lässt sich auf drei Dimensionen fortsetzen, indem man sie auf eine ausgezeichnete Ebene von $\mathbb{R}^3$ wirken lässt, und die Vektoren orthogonal zu dieser Ebene fixiert.*

Beispiel 3.3 *Die Diedergruppe $D_n \in O(\mathbb{R}^2)$ lässt sich ebenfalls fortsetzen, indem man die Rotationen wie zuvor auf eine Ebene wirken lässt. Die Spiegelungen in D_n identifiziere man mit $180°$ Rotationen um die ursprüngliche Spiegelungsachse. Insbesondere enthält D_n in drei Dimensionen keine Spiegelungen mehr.*

3.1 Platonische Körper

Da sich gezeigt hat, dass alle endlichen Untergruppen von $O(\mathbb{R}^2)$ Symmetriegruppen von regelmäßigen Polygonen sind, beschäftigt sich dieser Abschnitt mit den regelmäßigen Polyedern und deren Symmetriegruppen in drei Dimensionen. Es gibt genau 5 verschiedene regelmäßige Polyeder, sie sogenannten *platonischen Körper*. [3]

Es zeigt sich jedoch, dass diese fünf Körper nur drei verschiedene Symmetriegruppen besitzen. Um dies zu sehen, ersetze man bei einem dieser Körper alle Flächen durch Ecken, und füge Kanten dort ein, wo zuvor benachbarte Flächen waren. Durch diese Konstruktion erhält man den so genannten dualen Körper, welcher offenbar die gleichen Symmetrien aufweist. So sind der Würfel und das Oktaeder dual zueinander und ebenso der Dodekeder und Ikosaeder. Der Tetrader ist zu sich selbst dual.

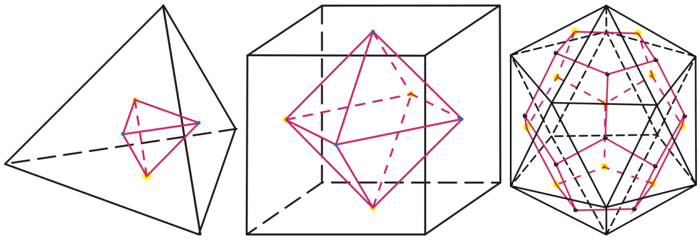

Abbildung 1: die platonischen Körper mit Dualität [3]

Bemerkung 3.4 *Die Rotationen der Körper lassen sich leicht in der Skizze ablesen, wodurch sich die drei Symmetriegruppen ergeben, die im Folgenden T,W und J heißen sollen.*

*Der **Tetraeder** besitzt*

- *4 dreizählige Rotationsachsen zwischen Ecken und gegenüber liegenden Flächenmittelpunkten*
- *und 3 zweizählige Rotationsachsen durch Mittelpunkte gegenüber liegender Kanten.*

Die Symmetriegruppe des Tetraeders $T \leq SO(\mathbb{R}^3)$ hat also Ordnung $|T| = 1+4\cdot2+3\cdot1 = 12$. Ohne Beweis: T is isomorph zur alternierenden Gruppe A_4.

*Der **Würfel** hat*

- *3 vierzählige Rotationsachsen durch Flächenmittelpunkte,*
- *4 dreizählige Rotationsachsen durch gegenüber liegende Ecken*
- *sowie 6 zweizählige Rotationensachsen durch gegenüber liegende Mittelpunkte von Kanten*

Die Symmetriegruppe des Würfels $W \leq SO(\mathbb{R}^3)$ hat also Ordnungn $|W| = 1+3\cdot3+4\cdot2+6\cdot1 = 24$. Ohne Beweis: W ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4.

*Der **Ikosaeder** besitzt*

- *10 dreizählige Rotationensachsen durch Flächenmittelpunkte,*
- *6 fünfzählige Rotationensachsen durch gegenüber liegende Ecken*
- *sowie 15 zweizählige Rotationensachsen durch Mittelpunkte gegenüber liegender Kanten.*

Die Symmetriegruppe des Ikosaeders $J \leq SO(\mathbb{R}^3)$ hat also Ordnung $|J| = 1+10\cdot2+6\cdot4+15\cdot1 = 60$. Ohne Beweis: J ist isomorph zur alternierenden Gruppe A_5.

Definition 3.5 *Sei $1 \neq r \in SO(\mathbb{R}^3)$ eine Rotation. Dann hat r genau zwei Fixpunkte auf der Einheitskugel, nämlich die Schnittpunkte mit der Rotationsachse. Diese Punkte nennen wir Pole der Rotation.*

Lemma 3.6 *Sei $G \leq O(\mathbb{R}^3)$ mit Polmenge P. Dann operiert G auf P durch Linksmultiplikation.*

Beweis: Sei $x \in P$ ein Pol einer Rotation $r \in G$. Für jedes $t \in G$ ist nun

$$(trt^{-1})tx = trx = tx.$$

Also ist tx Pol der Rotation trt^{-1}, also $tx \in P$, und die Operation ist wohldefiniert. □

Lemma 3.7 *Betrachtet man die Bahnen und Stabilisatoren der Operation einer Symmetriegruppe G auf ihrer Polmenge P, so ergeben sich folgende charakteristische Werte.*

G	$\lvert G\rvert$	$\lvert P\rvert$	Anzahl Bahnen	Ordnung der Stabilisatoren
C_n	n	2	2	n n
D_n	$2n$	$2n+2$	3	2 2 n
T	12	14	3	2 3 3
W	24	26	3	2 3 4
J	60	62	3	2 3 5

3.2 Klassifikation der endlichen Rotationsgruppen

Satz 3.8 *Sei nun $G \leq SO(\mathbb{R}^3)$ eine endliche Rotationsgruppe der Ordnung $n := |G|$ mit Polmenge P. Dann ist G (bis auf Isomorphie) eine der Gruppen C_n, $D_{n/2}$, T, W, J*

Beweis: Sei $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset P$ ein Repräsentantensystem der Bahnen von G auf P für das wir folgende Abkürzungen einführen:

$$\begin{aligned} v_i &:= |Gx_i| \\ n_i &:= |\mathrm{stab}_G(x_i)|\,. \end{aligned}$$

Sei außerdem $U := \{(R, x) \in G \times P : R \neq 1 \wedge Rx = x\}$ die Menge aller Paare von Polen und zugehöriger Rotation. Da jede nicht-trivial Rotation genau zwei Pole hat, ist $|U| = 2n - 2$.

Da der Stabilisator eines Pols genau die Untergruppe von Rotationen um die Achse dieses Pols ist, kann man die Elemente von U alternativ mithilfe von Stabilisatoren abzählen:

$$\begin{aligned} |U| &= \sum_{x \in P} (|\mathrm{stab}_G(x)| - 1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} |Gx_i| \cdot (|\mathrm{stab}_G(x_i)| - 1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (n - |Gx_i|). \end{aligned}$$

Wobei in der letzten Gleichheit benutzt wurde, dass $|Gx_i| = [G : \mathrm{stab}_G(x_i)]$ ist.

Nun haben wir also

$$\begin{aligned} & 2n - 2 = \sum_{i=1}^{k} (n - v_i) \\ \Rightarrow \quad & 2 - \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{v_i}{n}\right) \\ \Rightarrow \quad & \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)}_{\in [\frac{1}{2}, 1)} = 2 - \frac{2}{n} \in [1, 2). \end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass oBdA $n > 1$ ist, und immer auch $n_i > 1$, denn jeder Stabilisator besteht mindestens aus der Identität und einer echten Rotation. Aus der letzten Abschätzung folgt, dass $k \in \{2, 3\}$ sein muss.

Falls $k = 2$ ist, haben wir

$$\begin{aligned} & 2 - \frac{2}{n} = \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{n_2}\right) \\ \Rightarrow \quad & 2 = \underbrace{\frac{n}{n_1}}_{= v_1} + \underbrace{\frac{n}{n_2}}_{= v_2} \\ \Rightarrow \quad & v_1 = v_2 = 1 \wedge n_1 = n_2 = n. \end{aligned}$$

Es gibt also nur zwei Pole, und folglich nur eine Rotationsachse. Nach Satz 2.2 ist damit $G \cong C_n$ und wir sind fertig.

Sei im Folgenden also $k = 3$ und $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Falls $n_1 \geq 3$, dann wäre $\sum_i (1 - 1/n_i) \geq \sum_i (1 - 1/3) = 2$, was nicht sein kann. Also ist $n_1 = 2$ und wir haben

$$\begin{aligned} & 2 - 2/n = 1/2 + (1 - 1/n_2) + (1 - 1/n_3) \\ \Rightarrow \quad & 2/n + 1/2 = 1/n_2 + 1/n_3. \end{aligned}$$

Falls $n_2 = 2$ ist, ist $n_3 = n/2$ und es folgt $v_1 = v_2 = n/2$ und $v_3 = 2$. Damit ist $G \cong D_n$ und wir sind fertig.

Falls $n_2 \geq 4$ ist, gilt $1/n_2 + 1/n_3 \leq 1/2$, was nicht sein kann.

Es bleibt also nur noch der Fall $n_2 = 3$ übrig. Damit erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} & 2/n + 1/2 = 1/3 + 1/n_3 \\ \Rightarrow \quad & 2/n + 1/6 = 1/n_3. \end{aligned}$$

Wegen $n_3 \geq n_2 = 3$ können wir folgende Fallunterscheidung machen

- $n_3 = 3 \Rightarrow n = 12, (v_1, v_2, v_3) = (6, 4, 4)$. Damit ist $G \cong T$ die Tetraeder-Gruppe.
- $n_3 = 4 \Rightarrow n = 24, (v_1, v_2, v_3) = (12, 8, 6)$. Damit ist $G \cong W$ die Würfel-Gruppe.
- $n_3 = 5 \Rightarrow n = 60, (v_1, v_2, v_3) = (30, 20, 12)$. Damit ist $G \cong J$ die Ikosaeder-Gruppe.
- $n_3 \geq 6 \Rightarrow 2/n \leq 0$. Das ist unmöglich.

□

3.3 Klassifikation der endlichen orthogonalen Gruppen

Nachdem im vorigen Teil die Rotationsgruppen klassifiziert wurden, betrachten wir jetzt wieder beliebige (endliche) Gruppen, die also auch Spiegelungen enthalten können. Dies führt uns auf den Hauptsatz dieses Vortrags.

Satz 3.9 *Sei $G \leq O(\mathbb{R}^3)$ endlich. Dann ist G isomorph zu einer der Gruppen in folgenden drei Kategorien.*

- C_n, D_n, T, W, J
- $C_n^*, D_n^*, T^*, W^*, J^*$
- $C_{2n}]C_n, D_n]C_n, D_{2n}]D_n, W]T$

Dabei ist $H^* := H \cup -H$, sowie $K]H := H \cup \{-s | s \in K \backslash H\}$.

Beweis: Sei $H \leq G$ die Rotationsuntergruppe von G. Falls $G = H$, so sind wir mithilfe von Satz 3.8 sofort fertig. Anderfalls ist H ein Normalteiler mit Index 2.

Falls nun also $-1 \in G$ ist, ist $G = H \cup -H$. Also besteht G aus einer Gruppe von Rotationen und ihren Negativen. Diese Gruppe schreiben wir als H^*.

Es fehlt uns also nur noch der Fall dass $G \neq H$, aber $-1 \notin G$. Sei dazu $s \in G \backslash H$ fest. Da H Normalteiler von G ist, gilt für alle $r, r' \in H$

- $(-sr)(-sr') = (-s)^2 rr' = rr'$
- $r(-sr') = -srr'$
- $(-sr)r' = -srr'$

womit $K := H \cup -sH$ abgeschlossen unter Multiplikation ist. Wegen $\det(-s) = 1$ ist K also eine Rotationsgruppe, die H als Untergruppe mit Index 2 hat.

Außerdem lässt sich G aus K und H rekonstruieren mit

$$G = H \cup \{-s | s \in K \backslash H\} = K]H.$$

Das heißt also, dass man nur noch in der bekannten Liste von Rotationsgruppen nach Untergruppen mit Index 2 zu suchen braucht, und diese Konstruktion anwendet um alle noch nicht klassifizierten Gruppen zu erhalten. Die dritte Kategorie sind genau die Gruppen, die man so erhalten kann. □

Bemerkung 3.10 *Die einzige Gruppe im letzten Satz, die nicht sofort klar ist, ist $W]T$. Um zu sehen, dass die Tetraeder-Gruppe eine Untergruppe der Würfel-Gruppe ist, stelle man sich einen Tetraeder vor, dessen Ecken auf Ecken eines Würfels liegen. Dann ist klar, dass alle Rotationen, die den Tetraeder invariant lassen, auch den Würfel in sich selbst überführen. Also ist T eine Untergruppe von W. Der Index 2 ergibt sich aus Ordnungsgründen.*

Bemerkung 3.11 *Es ist $C_2 \cong C_1^* \cong C_2]C_1$. Insofern ist die Liste redundant. Es sind trotzdem alle drei aufgeführt, weil sie sich geometrisch durchaus unterscheiden. So ist C_2 eine Drehung um $180°$, C_1^* ist die Punktspiegelung des Raumes, und $C_2]C_1$ ist die Punktspiegelung einer ausgezeichneten Ebene bei Festhalten der Orthogonalen.*

4 Kristallographische Punktgruppen

Eine Gruppe $G \leq O(\mathbb{R}^3)$ heißt (kristallographische) Punktgruppe, falls es linear unabhängige Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gibt, sodass das Gitter $L := x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z} + z\mathbb{Z}$ invariant ist unter G. In diesem Abschnitt soll geklärt werden welche der zuvor bestimmten Gruppen Punktgruppen sind.

Angenommen G ist eine Punktgruppe. Sei $t \in G$. In geeigneter Basis ist dann

$$t = \begin{pmatrix} \det(t) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

für ein $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Also $\operatorname{spur}(t) = \det(t) + 2\cos(\vartheta)$.

Alternativ kann man als Basis auch (x, y, z) wählen. Nun muss $tx \in L$ sein, also ist tx eine ganzzahlige Linearkombination von (x, y, z). Analoges gilt für y und z, damit hat die Matrix von t bezüglich dieser Basis nur ganzzahlige Einträge, womit auch die Spur ganzzahlig ist.

Es folgt, dass $2 * \cos(\vartheta) \in \mathbb{Z}$ sein muss, wodurch nur noch folgende Winkel in Frage kommen.

$$\begin{aligned} & \vartheta \in \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\} \\ \Rightarrow \quad & \operatorname{ord}(t) \in \{1, 2, 3, 4, 6\} \end{aligned}$$

Von den Gruppen aus Satz 3.9 erfüllen nur die folgende die Bedingung an Element-Ordnung:

- $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_2, D_3, D_4, D_6, T, W$
- $C_1^*, C_2^*, C_3^*, C_4^*, C_6^*, D_2^*, D_3^*, D_4^*, D_6^*, T^*, W^*$
- $C_2]C_1, C_4]C_2, C_6]C_3, D_2]C_2, D_3]C_3, D_4]C_4, D_6]C_6, D_4]D_2, D_6]D_3, W]T$

Dies sind die 32 kristallographischen Punktgruppen. Die explizite Konstruktion der zugehörigen Gitter würde jedoch den Rahmen dieses Vortrags sprengen.

Literatur

[1] Grove und Benson: *Finite Reflection Groups*, 2. Auflage, Springer (1985)

[2] James E. Humphreys: *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press (1990)

[3] http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Platonischer_Körper&oldid=109208840