Affine Spiegelungsgruppen

Jonathan Fell
Matrikelnummer: 293439

Seminar zur Gruppentheorie

Lehrstuhl D für Mathematik
RWTH Aachen

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

In den vorigen Vorträgen hatten wir uns bereits mir Spiegelungsgruppen beschäftigt. Diese entstanden aus Spiegelungen bezüglich Hyperebenen, die den den Ursprung eines reellen, euklidischen Vektorraumes V enthielten. Dieses Konzept wollen wir nun erweitern, indem wir zusätzlich Spiegelungen an bestimmten affinen Hyperebenen zulassen.
Um die Operation dieser Gruppen zu charakterisieren werden wir uns mit den *Alkoven* von V bezüglich eines Wurzelsystems Φ beschäftigen. Weiterhin wollen wir die *Dynkin-Diagramme* dieser Graphen vorstellen und zum Schluss eine Formel für die Ordnung einer Weyl-Gruppe W herleiten.
Diese Ausarbeitung basiert auf dem Buch *Reflection Groups and Coxeter Groups* von Humphreys.

1 Einleitung

(1.1) Definition
Im Folgenden sei V stets ein reeller, euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Für $a \in V$ definieren wir H_a als die Hyperebene senkrecht zu a, also $H_a := \{v \in V : (a,v) = 0\}$ und die Abbildung s_a definiert durch

$$s_a : V \to V, v \mapsto v - \frac{2(v,a)}{(a,a)} \cdot a.$$

◊

(1.2) Bemerkung
Die Abbildung s_a ist eine Spiegelung an der Hyperebene H_a. Denn sie fixiert H_a und erfüllt $s_a a = -a$. Da $\mathbb{R}a \oplus H_a = V$ gilt, folgt somit diese Behauptung. Weiter ist s_a eine orthogonale Transformation, erfüllt also $(s_a v, s_a w) = (v,w)$ für alle $v, w \in V$ und es gilt $s_a^2 = \mathrm{id}_V$, also hat s_a Ordnung 2 in $O(V)$, der orhtogonalen Gruppe von V. ◊

(1.3) Definition
Eine Menge Φ heißt *Wurzelsystem* einer Gruppe W, falls $W = \langle\{s_a : a \in \Phi\}\rangle$ und es gelten

R1 $\Phi \cap \mathbb{R} = \{a, -a\}$ für alle $a \in \Phi$ und

R2 $s_a\Phi = \Phi$ für alle $a \in \Phi$.

Eine Teilmenge $\Pi \subset \Phi$ heißt *positives System*, wenn für alle $a \in \Phi$ mit $a > 0$ sofort a in Π liegt bezüglich einer totalen Ordnung $(V, <)$ auf V.
Eine Teilmenge $\Delta \subset \Phi$ heißt *totales System*, wenn Δ eine Basis für den $\mathbb{R}$-Span von Φ ist und weiterhin jedes $a \in \Phi$ eine Linearkombination von Vektoren aus Δ mit Koeffizienten gleichen Vorzeichens ist, also alle diese Koeffizienten ausschließlich positiv oder negativ sind. ◊

(1.4) Bemerkung
Einfache Systeme existieren stets. $\Diamond$

2 Affine Spiegelungsgruppen

Im Folgenden wollen wir affine Spiegelungen betrachten, die nicht zwangsläufig eine Hyperebene durch den Ursprung festlassen, sondern eine beliebige. Dazu nutzen wir die Gruppe $\mathrm{Aff}(V)$ der affinen Transformationen von V in sich. Im weiteren Verlauf bezeichnet W stets eine Weyl-Gruppe und die Menge der Cowurzeln $\check{\Phi}$, wobei $\check{a} = \frac{2 \cdot a}{(a,a)}$ ist, welches ebenfalls ein Wurzelsystem ist.

(2.1) Definition

(i) Zu $v \in V$ sei die Abbildung $t_v := t(v) : V \to V, w \mapsto w + v$ die *Translation* um v.

(ii) Für jede Wurzel $a \in \Phi$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ ist die affine Hyperebene $H_{a,k}$ definiert durch
$$H_{a,k} := \{v \in V : (a, v) = k\}.$$
Offensichtlich gelten $H_{a,k} = H_{-a,-k}$ und $H_{a,0} = H_a$.

(iii) Wir definieren die zu $H_{a,k}$ gehörige Spiegelung durch
$$s_{a,k} : V \to V, v \mapsto v - ((v, a) - k)\check{a}.$$

(iv) Ab nun bezeichne $\mathcal{H}$ die Menge aller Hyperebenen $H_{a,k}$ für $a \in \Phi$ und $k \in \mathbb{Z}$ $\Diamond$

(2.2) Bemerkung

(i) Für alle $g \in \mathrm{GL}(V)$ und $v \in V$ gilt: $gt(v)g^{-1} = t(gv)$, denn für $w \in V$ ist
$$gt(v)g^{-1}(w) = g(g^{-1}w + v) = w + gv = t(gv)(w).$$
Speziell ist die Untergruppe der Translationen ein Normalteiler von $\mathrm{GL}(V)$.

(ii) Es ist $H_{a,k} = t(\frac{k}{2}\check{a})(H_a)$. Dazu sei $v \in H_a$, dann ist $(a, v) = 0$
$$(a, t(\frac{k}{2}\check{a})(v)) = (a, v) + \frac{2 \cdot k}{2 \cdot (a, a)}(a, a) = k.$$
Also folgt $t(\frac{k}{2}\check{a})(v) \in H_{a,k}$. $\Diamond$

(2.3) Proposition

(i) Falls $w \in W$ liegt, so sind $wH_{a,k} = H_{wa,k}$ und $ws_{a,k}w^{-1} = s_{wa,k}$.

(ii) Falls für $v \in V$ gilt, dass (v,a) in $\mathbb{Z}$ liegt für alle $a \in \Phi$, dann sind $t(v)(H_{a,k}) = H_{a,k+(v,a)}$ und $t(v)s_{a,k}t(-v) = s_{a,k+(v,a)}$. $\Diamond$

Beweis

(i) Sei $v \in H_{a,k}$, dass heißt $(a,v) = k$. Ohne Einschränkung sei sofort $w = s_b$ für ein $b \in \Phi$, dann folgt der allgemeine Fall sofort wegen $w = \prod_{i=1}^{n} s_{a_i}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \Phi$ für alle $1 \leq i \leq n$. Es verbleibt also zu zeigen, dass $(s_b(v), s_b(a)) = k$ für alle $v \in H_{a,k}$ gilt, da s_b bereits bijekiv ist.
Es ist

$$\begin{aligned}
(s_b(v), s_b(a)) &= (v - \frac{2(v,b)}{(b,b)}b, a - \frac{2(a,b)}{b,b}b) \\
&= (v,a) - \frac{2(v,b)}{(b,b)}(b,a) - \frac{2(a,b)}{(b,b)}(v,b) + \frac{4(v,b)\cdot(a,b)\cdot(b,b)}{(b,b)^2} \\
&= (v,a) = k.
\end{aligned}$$

Es sei $v \in H_{a,k}$. Dann berechnet man

$$\begin{aligned}
s_b s_{a,k} s_b(v) &= s_b(s_b(v) - [(s_b(v), a) - k]\check{a}) \\
&= v - [(s_b(v), a) - k] \cdot \frac{2}{(a,a)} s_b(a) \\
&= v - [(v,a) - \frac{2(v,b)}{(b,b)}(b,a) - k] \cdot \frac{2}{(a,a)} s_b(a) \\
&= v - [(v,a) - \frac{2(a,b)}{(b,b)}(v,b) - k] \cdot \frac{2}{(s_b(a), s_b(a))} s_b(a) \\
&= v - [(v, a - \frac{2(a,b)}{(b,b)}b) - k] \cdot s_b\check{(a)} \\
&= v - [(v, s_b(a)) - k] \cdot s_b\check{(a)} \\
&= s_{s_b(a),k}.
\end{aligned}$$

(ii) Hierzu sei $x \in H_{a,k}$, dann ist $(t(v)(x), a) = (x+v, a) = (x,a) + (v,a) = (v,a) + k$. Also liegt $t(v)(x)$ in $H_{a,k+(v,a)}$.
Weiter ist mit $y \in V$

$$\begin{aligned}
t(v)s_{a,k}t(-v)(y) &= t(v)s_{a,k}(y - v) \\
&= s_{a,k}(y-v) + v \\
&= y - [(y-v, a) - k] \cdot \check{a} \\
&= y - [(y,a) - (k + (v,a))] \cdot \check{a} \\
&= s_{a,k+(v,a)}(y).
\end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. ■

(2.4) Definition

(i) Die *affine Weyl-Gruppe* W_a wird definiert als die Untergruppe der $\mathrm{Aff}(V)$, die von den affinen Spiegelungen $s_{a,k}$ mit $a \in \Phi$ und $k \in \mathbb{Z}$ erzeugt wird.

(ii) Das *Wurzelgitter* $L(\Phi) := \langle \Phi \rangle_{\mathbb{Z}}$ wird definiert als der $\mathbb{Z}$-Span von Φ.

(iii) Das *Gewichtsgitter* ist definiert als die Menge $\check{L}(\Phi) = \{v \in V : (v, \check{a}) \in \mathbb{Z}$ für alle $a \in \Phi\}$.

(iv) Der Zusammenhangsindesx f ist definiert als der Index von $\widehat{L} = \widehat{L}(\check{\Phi})$ und $L = L(\check{\Phi})$ ♢

(2.5) Beispiel

Mit dem bekannten, einfachen Wurzelsystem $\Delta = \left\{\binom{1}{0}, \binom{1}{-1}\right\}$ und dem Wurzelsystem $\left\{\binom{0}{1}, \binom{0}{-1}, \binom{1}{0}, \binom{-1}{0}, \binom{1}{-1}, \binom{-1}{1}, \binom{1}{1}, \binom{-1}{-1}\right\}$ erhält man als W_a die Gruppe $\widetilde{D_8}$. Worin sich diese von der D_8 unterscheidet und wie diese beiden zusammenhängen, werden wir im Folgenden genauer betrachten. ♢

(2.6) Proposition

W_a ist das semidirekte Produkt von W und der zu $L := L(\check{\Phi})$ korrespondierenden Translationsgruppe. ♢

Beweis

Offensichtlich ist der Schnitt von W mit der Translationengruppe trivial. Weiterhin hatten wir bereits gesehen, das die Translationen von W normalisiert werden. Also können wir das semidirkete Produkt bilden und nennen es vorerst U.

Weiterhin gilt für alle $v \in V$

$$s_{a,k}(v) = v - (v, a) \cdot \check{a} + k \cdot \check{a} = s_a(v) + k \cdot \check{a} = t(k\check{a})s_a(v).$$

Also liegen bereits alle Erzeuger von W_a in W'. Da s_a Ordnung 2 hat, folgt aus der Rechnung auch sofort

$$t(k\check{a}) = s_{k,a}s_a \in W_a.$$

Also sind die Translationsgruppe und auch U bereits in W_a enthalten. ■

(2.7) Bemerkung

Da auch die zu $\check{L} = \{v \in V : (v, a) \in \mathbb{Z}$ für alle $a \in \Phi\}$ korresponiderte Translationsgruppe normal in W ist, können wir auch hier das semidirekte Produkt mit W bilden, welches wir mit $\widehat{W_a}$ bezeichnen. Sie enthält W_a als Normalteiler von endlichem Index. ♢

(2.8) Korollar
Falls $w \in \widehat{W_a}$ und $H_{a,k} \in \mathcal{H}$, dann ist $wH_{a,k} = H_{b,l}$ für ein $b \in \Phi$ und ein $l \in \mathbb{Z}$, und deswegen ist $ws_{a,k}w^{-1} = s_{b,l}$. $\Diamond$

3 Alkoven

(3.1) Definition
Um besser zu verstehen, wie die Gruppen W_a und $\widehat{W_a}$ auf den Hyperebenen $\mathcal{H}$ operieren, betrachten wir im Folgenden die Operation dieser Gruppen auf der Menge $\mathcal{A}$ von Zusammenhangskomponenten von

$$V^o := V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H.$$

Dabei bezeichnen wir die Elemente von $\mathcal{A}$ als *Alkoven*. Da die Elemente von Aff(V) Homöomorphismen sind, ist klar, dass $\widehat{W_a}$ die Elemente von $\mathcal{A}$ permutiert.
Da V^o offen ist, gibt es für jedes $v \in V^o$ und alle $a \in \Phi$ ein $k \in \mathbb{Z}$ derart, dass v zwischen $H_{a,k}$ und $H_{a,k+1}$ liegt.
Von nun an wollen wir weiterhin eine Menge Δ von einfachen Wurzeln in Φ definieren. Außerdem wollen wir annehen, dass Φ irreduzibel ist. $\Diamond$

(3.2) Bemerkung
Nun können wir einen speziellen Alkoven auszeichnen, und zwar

$$A_o := \{v \in V : 0 < (a, v) < 1 \text{ für alle } a \in \Phi^+\}.$$

Das ist tatsächlich ein Alkoven: Es ist sicherlich offen als Schnitt über die Urbilder von $(0, 1)$ unter den Abbildungen $v \mapsto (a, v)$ für $a \in \Phi^+$, also ist A_o offen. Weiterhin ist es konvex, also zusammenhängend. Weiter ist jedes $v \notin A_o$ von A_o getrennt durch eine Hyperebende $H_{a,0}$ oder $H_{a,1}$ für ein $a \in \Phi^+$.
Generell sind einzelne Alkoven stets über ein System von Ungleichungen der Form $k_a < (a, v) < k_a + 1$ für alle $a \in \Phi^+$ definiert.
Da Φ^+ irreduzibel ist, gibt es eine eindeutige, größte Wurzel $\widetilde{a}$, mit der Eigenschaft, dass für alle positiven Wurzeln a deder Term $\widetilde{a} - a$ eine Summe einfacher Wurzeln ist. Weiter ist Δ ein einfaches System für Φ. Daraus erhalten wir

$$A_o = \{v \in V : 0 < (a, v) \text{ für alle } a \in \Delta, (v, \widetilde{a}) < 1\}.$$

Das A_o in der rechten Menge enthalten ist, ist offensichtlich. Erfüllt ein $v \in V$ nun die Eigenschaften der rechten Menge, so hat man bereits $(v, a) > 0$ für alle positiven Wurzeln Φ. Da weiterhin $\widetilde{a} - a$ eine Summe positiver Wurzeln ist, ist $(v, \widetilde{a} - a) > 0$, also $(v, a) \leq (v, \widetilde{a}) < 1$, also ist $v \in A_o$. Wir nennen die

Hyperebenen H_a für $a \in \Phi^+$ und $H_{\widetilde{a},1}$ die *Wände* von A_o und mit $S_a = \{s_a : a \in \Phi^+\} \cup s_{\widetilde{a},1}$ wollen wir dazugehörigen Spiegelungen bezeichnen. $\Diamond$

(3.3) Beispiel
Den Alkoven A_o der Gruppe $\widetilde{D_8}$ erhält man, indem man die Hyperebenen einzeichnet, die ihn begrenzen:

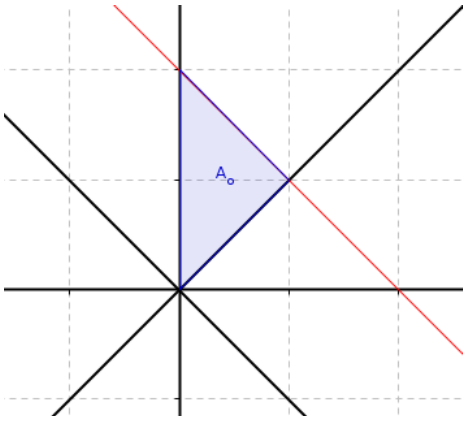
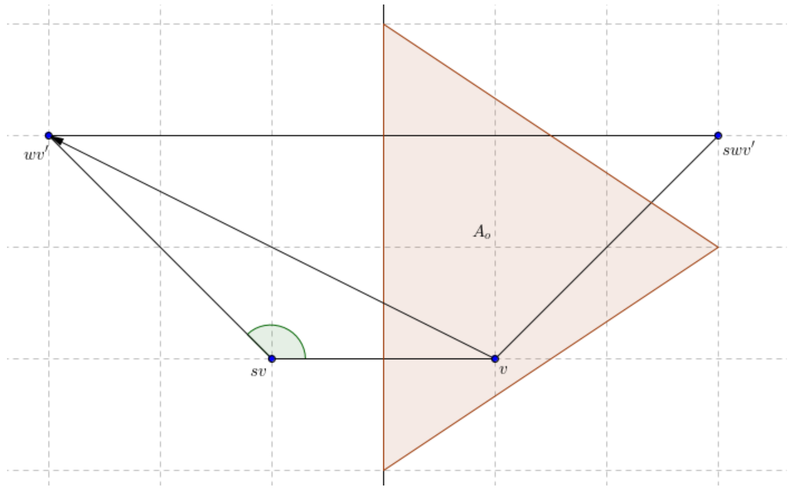


Abbildung 1: A_o der Gruppe $\widetilde{D_8}$

(3.4) Proposition
Die Gruppe W_a operiert transitiv auf der Menge aller Alkoven $\mathcal{A}$ und wird von der Menge S_a erzeugt. $\Diamond$

Beweis
Sei zunächst U die von S_a erzeugte Gruppe. Wir zeigen zuerst, dass bereits U transitiv auf $\mathcal{A}$ operiert. Dazu genügt es zu zeigen, dass für jedes $A \in \mathcal{A}$ ein $w \in U$ existiert, so dass $wA = A_o$ ist. Seinen also $v \in A_o$ und $v' \in A$. Die Bahn von v' unter der Operation der Translationsgruppe bezüglich $L = L(\check{\Phi})$ ist eine diskrete Teilmenge von V. Da W_a das semidirekte Produkt der Translationsgruppe mit einer endlichen Gruppe ist, ist auch die Bahn von v' unter W_a diskret in V. Also existiert ein wv' mit minimalem Abstand von v. Nun werden wir zeigen, dass $wv' \in A_o$, denn daraus folgt sofort $wA = A_o$.
Ist $wv' \notin A_o$, so trennt eine Wand H von $\mathcal{A}$ die Punkte wv' und v. Dann sei $s \in U$ die zu H gehörende Spiegelung. Dann gilt $\|swv' - v\| < \|wv' - v\|$.
Dazu: Man betrachte das Viereck mit Eckpunkten $wv', swv'sv, v$. Aus dem Kosinussatz folgt dann, dass für das entstehende Trapez die Länge der Diagonalen größer ist als die einer der beiden nicht-parallelen Seiten. Eine dieser Diagonalen ist aber genau der Vektor zwischen den Punkten sv und swv', während die Seiten des zugehörigen Dreiecks die Vektoren zwischen sv und v respektive v und swv' sind.

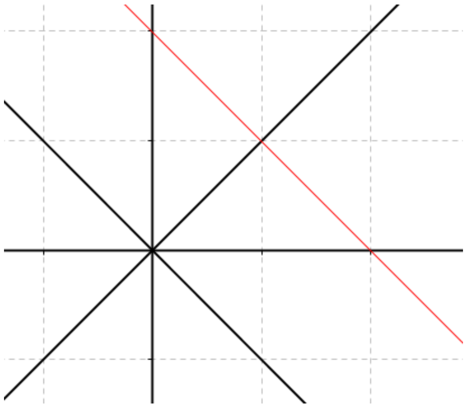


Mit den Bezeichnungen $a = \|swv' - v\| = \|sv - wv'\|$ und $b = \|sv - v\| > 0$ sowie $c = \|wv' - v\|$ gilt nach dem Kosinussatz

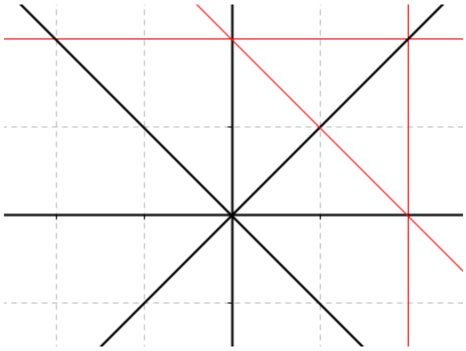
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

wobei γ der eingezeichnete Winkel sei. Wir nehmen hier sofort $\gamma \geq \frac{\pi}{2}$ an, denn $\gamma < \frac{\pi}{2}$ ergibt sich analog, indem wir die Rollen von sv und wv' sowie von v und swv' vertauschen. . Dann ist $cos(\gamma) \leq 0$, also müssen sowohl $a < c$ und $b < c$ gelten.
Da aber swv' in der Bahn von v' liegt, erhalten wir somit einen Widerspruch. Also operiert U transitiv auf $\mathcal{A}$.
Daher hat jeder Alkoven eindeutige Wände, nämlich die Bilder der Wände von A_o und weiterhin tritt jede Hyperebene $H_{a,k}$ als Wand wenigstens zweier Alkoven auf. Um nun zu zeigen, dass W_a auch in U liegt, genügt, dass wir uns klar machen, dass alle $s_{a,k}$ in U liegen. Dazu sei A ein Alkoven mit Wand $H_{a,k}$. Dann existiert ein $w \in U$, so dass $wA = A_o$ ist. Also ist $wH_{a,k}$ eine der Wände von A_o, deren Spiegelung s in U liegt. Dann erhalten wir $ws_{a,k}w^{-1} = s$ und somit $s_{a,k} \in U$ wie behauptet. ■

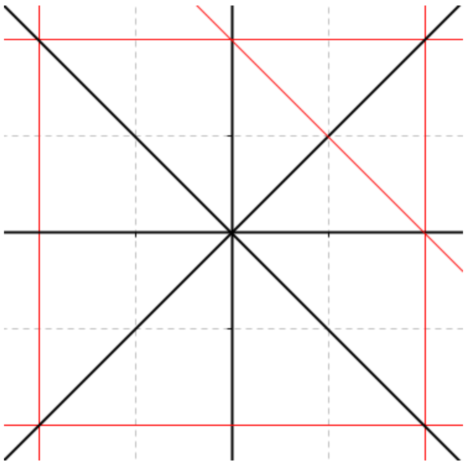
(3.5) Beispiel
Dass S_a die Gruppe W_a bereits erzeugt, wollen wir uns hier noch einmal am Beispiel der $\widetilde{D_8}$ vor Augen führen. Dazu betrachten wir anstatt der Spiegelungen die dazugehörigen Hyperebenen.
Die $\widetilde{D_8}$ besteht aus den Produkten aller Spiegelungen an Hyperebenen $H_{a,k}$ mit $a \in \Phi$ und $k \in \mathbb{Z}$.
Also haben wir zunächst nur die Spiegelungen der D_8 und die affine Spiegelung $s_{\widetilde{a},1}$.



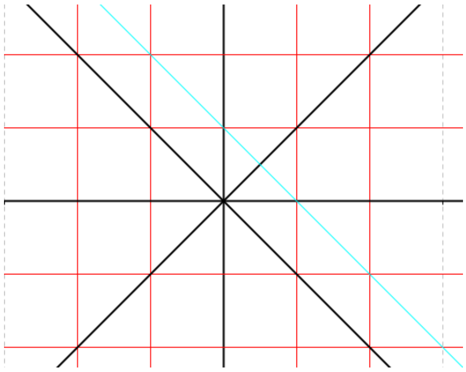
Indem wir nun alle oben schwarz gefärbten Ebenen an der roten spiegeln, erhalten wir:



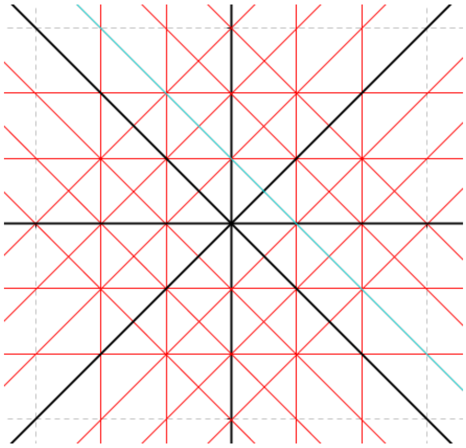
Dies führen wir nun iterativ fort.



Nun müssen wir an die weiter "außen" liegenden Hyperebenen kommen.



Schließlich wollen wir auch die "schräg" liegenden Hyperebenen erzeugen können. Dazu spiegeln wir die Ebenen, die durch Φ gegeben waren an den neu entstandenen.



Dies können wir iterativ fortführen. $\Diamond$

(3.6) Bemerkung

Da S_a die Gruppe W_a erzeugt, kann man auf W_a die Längenfunktion $l : W_a \to \mathbb{N}$ definieren, die einem $w \in W_a$ das kleinste $k \in \mathbb{N}$ zuordnet, so dass w ein Produkt von k Elemente von S_a ist. Eine Darstellung von w also Produkt von $l(w)$ Elementen aus S_a heißt *reduziert*. Im Folgenden wollen wir versuchen, die Längenfunktion geometrisch zu interpretieren. $\Diamond$

4 Längenfunktion und Hyperebenen

4.1 Die Längenfunktion

(4.1) Bemerkung

Jeder Alkoven $A \in \mathcal{A}$ liegt in einem der Halbräume, die von $H_{a,k} \in \mathcal{H}$ definiert werden. Zwei Alkoven A und A' werden von einer Hyperebene H getrennt, wenn

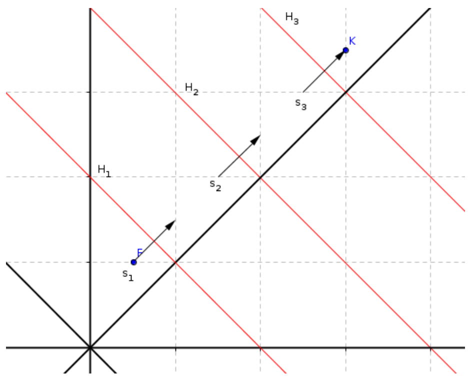
sie in unterschiedlichen Halbräumen bezüglich der Hyperebene liegen. $H_{a,k}$ trennt zum Beispiel immer die Alkoven A_o und $s_{a,k}A_o$ für alle $s_{a,k} \in S_a$. Im Folgenden wird mit der Hyperebene H_s diejenige Ebene bezeichnet, die zur Spiegelung $s \in W$ gehört.
Im Weiteren wollen wir Längenfunktion mit der Anzahl der Hyperebenen vergleichen, die zwei Alkoven trennen. Dazu wollen wir vorab festhalten, dass diese Zahl stets endlich ist. Denn die Verbindungslinie zwischen je einem Punkt aus jedem der beiden Alkoven ist sicherlich von endlicher Länge. Damit kann sie also nur endlich viele Ebenen $H_{a,k}$ schneiden für jedes $a \in \Phi$, da diese Ebenen bereits wieder einen stets gleichbleibenden Abstand haben. $\Diamond$

(4.2) Definition
Wir können die Abbildung $n : \widehat{W_a} \to \mathbb{N}, w \mapsto |L(w)|$ definieren, wobei

$$L(w) = \{H \in \mathcal{H} : H \text{ trennt } \mathcal{A}_o \text{ und } w\mathcal{A}_o\}$$

ist, für $w \in W_a$. $\Diamond$

(4.3) Beispiel
Wir betrachten wieder die Gruppe $\widetilde{D_8}$. Dasjenige $w \in \widetilde{D_8}$, das F auf K abbildet, erfüllt also $L(w) = \{H_1, H_2, H_3\}$ und somit $n(w) = 3$. Hier sehen wir auch, das $w = s_1 s_2 s_3$ ist.



$\Diamond$

(4.4) Bemerkung
Im Folgenden wollen wir zeigen, dass die Einschränkung von n auf W_a der Längenfunktion l entspricht. Zuerst bemerken wir, dass $n(1) = 0 = l(1)$ und weiterhin $n(s) = 1$ für $s \in S_a$. Dazu wollen wir zeigen, dass $n(s) = 1$ ist, nach Obigem also sofort, dass $L(s) = \{H_s\}$. Dies ist aber sofort klar, da eine Verbindung zwischen einem $v \in A_o$ und sv nur die Ebene H_s schneidet.
Weiterhin ist für $w \in \widehat{W_a}$ stets $n(w) = n(w^{-1})$, denn: H trennt A_o und wA_o genau dann, wenn $w^{-1}H$ die Alkoven A_o und $w^{-1}A_o$ trennt. Speziell folgt hieraus sogar, dass $w^{-1}L(w) = L(w^{-1})$.

Schließlich wollen wir noch festhalten, dass, falls $L(w) \neq \emptyset$ für $w \in \widehat{W_a}$, in $L(w)$ mindestens eine der Ebenen H_s für ein $s \in S_a$ liegt, denn ansonsten lägen A_o und wA_o in den gleichen Halbräumen bezüglich aller H_s für $s \in S_a$. Aber A_o ist genau definiert als der Schnitt eben dieser Halbräume. $\Diamond$

Um n weiterhin mit der Längenfunktion zu vergleichen, wollen wir das Verhalten von n betrachten, wenn im Argument mit $s \in S_a$ multipliziert wird.

(4.5) Lemma
Sei $w \in \widehat{W_a}$ und $s \in S_a$.

(i) H_s gehört zu genau einer der Mengen $L(w^{-1})$ oder $L(sw^{-1})$.

(ii) $s(L(w^-1)\backslash\{H_s\}) = L(sw^{-1})\backslash\{H_s\}$

(iii) $n(ws) = n(w) - 1$ falls $H_s \in L(w^{-1})$ und ansonsten $n(ws) = n(w) + 1$. $\Diamond$

Beweis

(i) Angenommen, H_s läge in beiden Mengen. Dann trennt wH_s den Alkoven A_o sowohl von wA_o als auch von wsA_o, also liegen Letztere im selben Halbraum bezüglich H_s. Dann aber müssen auch A_o und sA_o auf der selben Seite von H_s liegen, was ein Widerspruch ist.
Falls H_s nun in keiner der beiden Mengen läge, so trennt wH_s sowohl wsA_o als auch wA_o nicht von A_o, also liegen auch hier wieder A_o und sA_o im selben Halbraum bezüglich H_s.

(ii) Angenommen $H = H_{a,k} \neq H_s$ liegt in $L(w^{-1})$, also gilt $wH \in L(w)$. Da s die Hyperebene H_s fest lässt, folgt $sH \neq H_s$. Angenommen, sH läge nicht in $L(sw^{-1})$, dann trennt sH die Alkoven A_o und $sw^{-1}A_o$ nicht, folglich trennt H sA_o und $w^{-1}A_o$ und damit trennt wH auch A_o und wsA_o nicht. Speziell folgt $wH \notin L(ws)$. Allerdings lag nach Annahme wH ind $L(w)$, somit muss wH die Alkoven wA_o und wsA_o trennen. Somit ist $H \in L(s) = \{H_s\}$, was ein Wiederspruch zur Wahl von H ist. Dies zeigt eine Inklusion, die andere folgt genau so, indem man w und ws vertauscht.

(iii) Dies folgt sofort aus den ersten beiden Aussagen. ■

(4.6) Bemerkung
Wir erhalten hieraus sofort, dass $n(w) \leq l(w)$ für $w \in W_a$, denn:
Falls $w = 1$, so ist $n(w) = 0 = l(w)$. Ansonsten sei $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_r$ eine reduzierte Darstellung. Denn nach dem letzten Lemma wächst n mit jedem s_i maximal um 1. $\Diamond$

4.2 Einfache Transitivität

(4.7) Lemma
Falls $1 \neq w \in W_a$ und $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_r$ eine reduzierte Darstellung mit $s_i \in S_a$, dann sind alle Hyperebenen $H_i := H_{s_i}$

$$H_1, s_1 H_2, s_1 s_2 H_3, \ldots, s_1 \cdot \ldots \cdot s_{r-1} H_r$$

unterschiedlich. $\Diamond$

Beweis
Angenommen, diese Hyperebenen sind nicht alle unterschiedlich. Dann gilt für $p < q$ somit

$$s_1 \cdot \ldots \cdot s_{p-1} H_p = s_1 \cdot \ldots \cdot s_{q-1} H_q,$$

also

$$H_p = s_p \cdot \ldots \cdot s_{q-1} H_q.$$

Dann gilt aber auch

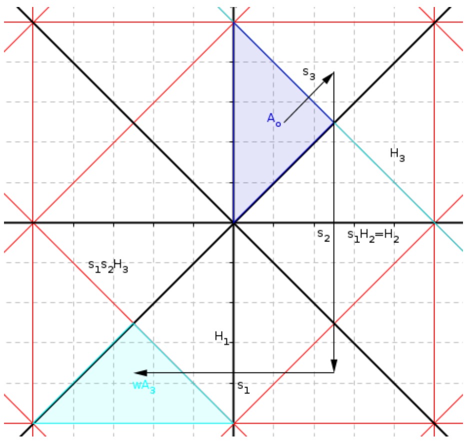
$$s_p = (s_p \cdots s_{q-1}) s_q (s_{q-1} \cdots s_p).$$

Damit folgt aber

$$s_p \cdot \ldots \cdot s_q = s_{p+1} \cdot \ldots \cdot s_{q-1},$$

was es uns ermöglicht, die Länge der reduzierten Darstellung von w zu reduzieren. Das ist ein Widerspruch. $\blacksquare$

(4.8) Beispiel
Exemplarisch wollen wir uns dass an der $\widetilde{D}_8$ klar machen. Wir betrachten $w = s_1 s_2 s_3 \in \widetilde{D}_8$, das wie folgt abbildet:



Jetzt können wir nun den Haupstatz dieses Abschnittes zeigen. $\Diamond$

(4.9) Satz

(i) Sei $1 \neq w \in W_a$ mit der reduzierten Darstellung $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_r$. Indem wir der Übersichtlichkeit halber $H_i := H_{s_i}$ setzen, erhalten wir

$$L(w) = \{H_1, s_1H_2, s_1s_2H_3, \ldots, s_1 \cdot \ldots \cdot s_{r-1}H_r\}.$$

Weiterhin sind all diese Hyperebenen disjunkt.

(ii) Auf W_a stimmt die Abbildung n mit der Längenfunktion überein.

(iii) Die Gruppe W_a operiert regulär auf $\mathcal{A}$. ◊

Beweis

(i) Wie bereits gesehen, gilt $L(s) = \{H_s\}$ für alle $s \in S_a$. Nun induzieren wir nach $r = l(w)$. Falls $r > 1$ gilt, so lautet die Induktionsvoraussetzung

$$L(s_2 \cdot \ldots \cdot s_r) = \{H_2, s_2H_3, \ldots, s_2 \cdot \ldots \cdot s_{r-1}H_r\}$$

und alle diese Hyperebenen sind disjunkt. Wäre nun $H_1 \in L(s_2 \cdot \ldots \cdot s_r)$, dann gilt bereits

$$H_1 = s_1H_1 \in \{s_1H_2, s_1s_2H_3, \ldots, s_1s_2 \cdot \ldots \cdot s_{r-1}H_r\}$$

was ein Widerspruch zu obigem Lemma ist. Also gilt $H_1 \notin L(s_1w)$. Nun wenden wir (4.5) mit $s = s_1$ und $w^{-1} = s_2 \cdot \ldots \cdot s_r$ an. Nach dem ersten Teils des Lemmas liegt H_1 in $L(w)$ und der zweite Teil ergibt, dass $L(w)$ aus r Hyperebenen bestehen muss, die wiederum alle disjunkt sind nach vorigem Lemma.

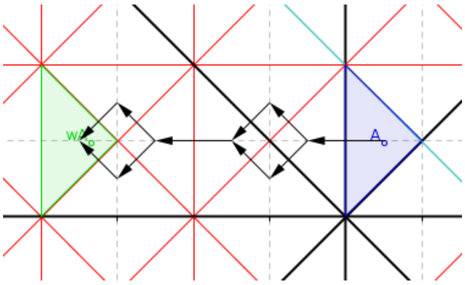
(ii) Folgt sofort aus (i).

(iii) Wir wissen bereits, dass W_a transitiv operiert. Es bleibt also zu zeigen, dass kein Element außer 1 einen Alkoven festlässt. Betrachten wir ohne Einschränkung sofort A_o, denn wenn $A_o = wA_o$ ist, folgt sofort $L(w) = 0$, also auch $0 = n(w) = l(w)$, also gilt $w = 1$. ■

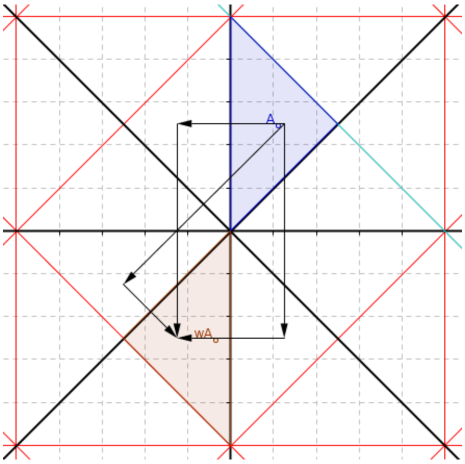
Dem obigen Beweis kann man entnehmen, dass das Produkt der Spiegelungen, die zu den Hyperebenen, die A_o und wA_o trennen, gehören, genau w ist, in entsprechender Reihenfolge multipliziert.

(4.10) Beispiel

Wir hatten bereits anschaulich gesehen, wie die Gruppe $\widetilde{D_8}$ aus S_a entsteht. Dann kann man ein Element $w \in \widetilde{D_8}$ als Produkt irgendwelcher Spiegelungen schreiben, die wiederum analog zum ersten Beispiel aus Produkten von Spiegelungen aus S_a entstehen.



Wir sehen auch, dass diese Zerlegungen nicht eindeutig sein müssen, vor allem, dass auch die reduzierte Zerlegung nicht unbedingt eindeutig sein muss.



$\Diamond$

(4.11) Bemerkung
$\widehat{W_a}$ opertiert im Allgemeinen nicht transitiv auf $\mathcal{A}$. Ist dann $w \in \widehat{W_a}$, so existiert wegen der Transitivität von W_a ein $w' \in W_a$ mit $wA_o = w'A_o$. Dann ist aber $ww'^{-1}A_o = A_o$. Wenn also Ω die Untergruppe von $\widehat{W_a}$ ist, die A_o stabilisiert, erkennen wir so, dass $\widehat{W_a}$ das Produkt von W_a mit Ω ist. Dann W_a regulär operiert, folgt $W_a \cap \Omega$ ist trivial und somit ist sogar $\widehat{W_a} = W_a \rtimes \Omega$. Dann folgt $\Omega \cong \widehat{W_a} \backslash W_a \cong L \backslash \widehat{L}$, also $|\Omega| = f$. $\Diamond$

5 Austauschbedingungen

Wir hatten bereits in früheren Vorträgen gesehen, dass eine bestimmte Austauschbedingung äquivalent zur Auslassbedingung ist. Damit können wir ein anderes Argument aus einem früheren Vortrag nutzen, um zu zeigen, dass (W_a, S_a) ein Coxetersystem ist.

(5.1) Satz (Austauschbedingung)
Sei $w \in W_a$ mit einer reduzierten Darstellung $s_1 \cdot \ldots \cdot s_r$, wobei stets $s_i \in S_a$ gilt. Falls $l(ws) < l(w)$ für $s \in S_a$, dann existiert ein $\widehat{s}_i$ mit $1 \leq i \leq n$, so dass $ws = s_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{s}_i \cdot \ldots \cdot s_r$ gilt. $\Diamond$

Beweis
Im letzten Satz hatten wir bereits gesehen, dass

$$L(w) = \{H_1, s_1 H_2, \ldots, s_1 \cdots s_{r-1} H_r\}$$

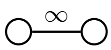
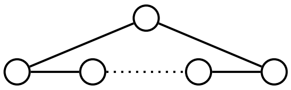
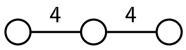
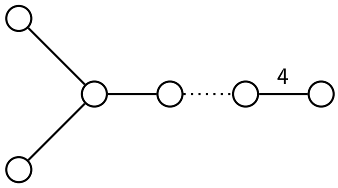
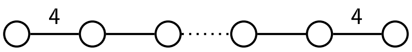
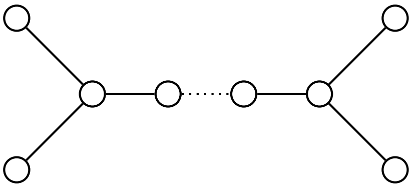
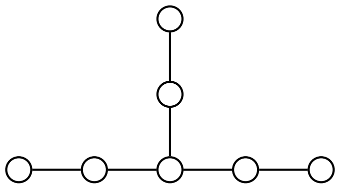
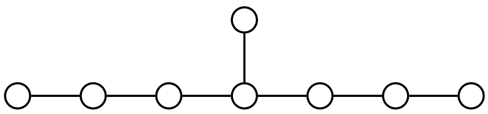
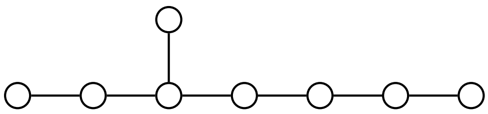
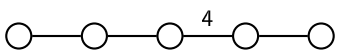
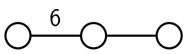
ist. Folglich gilt

$$L(w^{-1}) = w^{-1} L(w) = \{s_r \cdots s_1 H_1\, s_r \cdots s_2 H_2, \ldots, s_r H_r\}.$$

Dabei gilt stets $s_i H_i = H_i$. Wegen der Annahme an s und dem letzten Teil von (4.5) folgern wir, dass H_s in $L(w^{-1})$ liegen muss, etwa $H_s = s_r \cdots s_{i+1} H_i$ für ein $1 \leq i \leq r$. Dann folgt aber $(s_r \cdots s_{i+1}) s_i (s_{i+1} \cdots s_r) = s$ oder $s_i s_{i+1} \cdots s_r = s_{i+1} \cdots s_r s$. Indem wir substituieren, erhalten wir $ws = s_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{s_i} \cdot \ldots \cdot s_r$. ∎

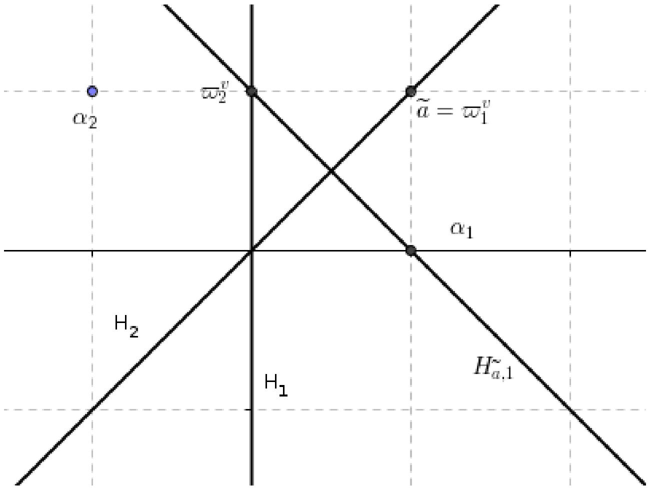
6 Coxetergraphen und erweiterte Dynkindiagramme

Wie zuvor wollen wir Coxetergraphen betrachten, diesmal allerdings für die Coxetergruppen W_a. Dazu müssen wir erneut nur die Ordnungen der Produkte $s_a s_{\widetilde{a},1}$ für $a \in \Delta$ berechnen, um die Kanten entsprechend gewichten zu können. Für die Lietheorie ist es üblich *erweiterte Dynkindiagramme* zu betrachten. Diese beinhalten Informationen über die Längen der Wurzeln, wenn eine Wurzel zum einfachen System Δ hinzugefügt wird. Da die Winkel zwischen einfachen Wurzeln stumpf sind, nutzt man häufig $-\widetilde{a}$, welches man auch häufig mit a_0 bezeichnet, als neue Wurzel. Es stellt sich heraus, dass auch der Winkel zwischen a_0 und anderen einfachen Wurzeln stets stumpf. $\widetilde{a}$ besitzt mit jeder anderen einfachen Wurzel a einen spitzen Winkel, denn ansonsten wäre $s_a \widetilde{a}$ eine größere Wurzel, die man erhält, indem man ein positives Vielfaches von a hinzuaddiert. Im Folgenden wollen wir der Vollständigkeit halber die bereits bekannten, für die Lie-Theorie relevanten Graphen aus einem früheren Vortrag angeben. Sie entstehen aus den bereits bekannten Graphen für die endlichen Spiegelungsgruppen, indem wir für den zusätzlichen Erzeuger einen Knoten hinzufügen und erneut die Ordnungen dieses Elements mit den anderen Erzeugern berechnen.

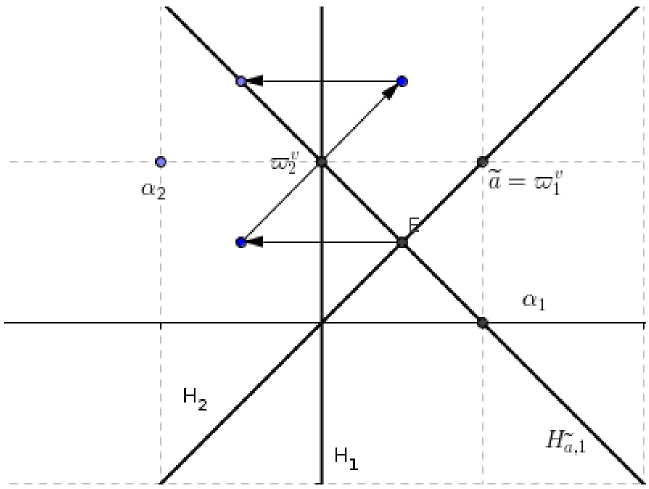
Gruppe	Diagramm
$\widetilde{A_1}$	
$\widetilde{A_n}, n \geq 2$	
$\widetilde{B_2} = \widetilde{C_2}$	
$\widetilde{B_n}$ falls $n \geq 3$	
$\widetilde{C_n}$ falls $n \geq 3$	
$\widetilde{D_n}$ falls $n \geq 4$	
$\widetilde{E_6}$:	
$\widetilde{E_7}$	
$\widetilde{E_8}$	
$\widetilde{F_4}$	
$\widetilde{G_2}$	

(6.1) Beispiel

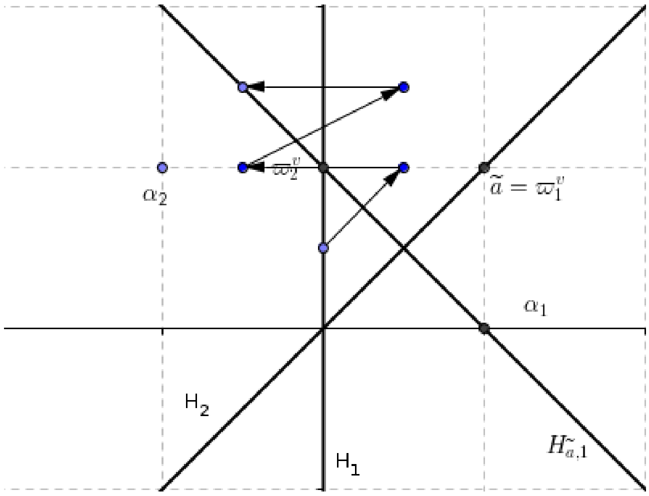
Exemplarisch wollen wir nun den Dynkingraphen der $\widetilde{D_8}$ konstruieren. Dazu betrachten wir zunächst das einfache System Δ und $s_{\tilde{a},1}$:



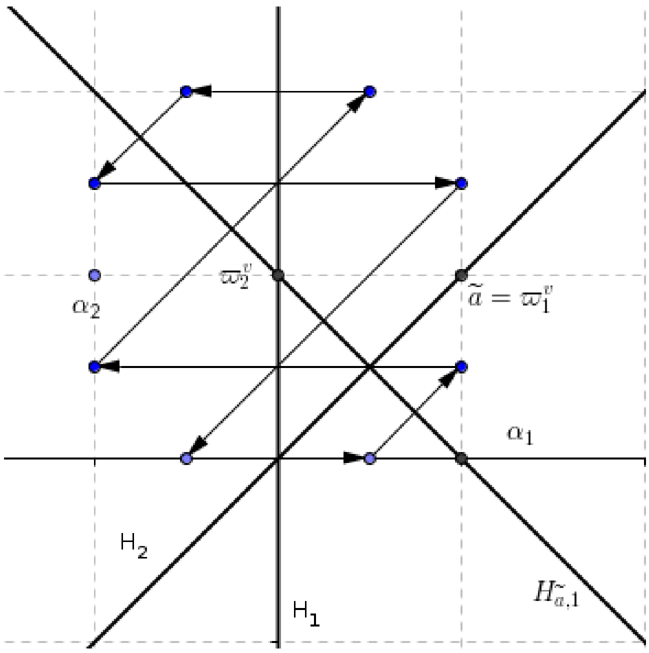
Zunächst ist klar, dass das Produkt $s_2 s_{\widetilde{a},1}$ Ordnung 2 hat, da die beiden zugehörigen Hyperebenen orthogonal zueinander sind.
Nun genügt es, um die Ordnung von $s_1 s_{\widetilde{a},1}$ zu berechnen, die Bahnen dreier affin unnabhängiger Punkte zu bestimmen.



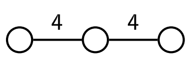
Die Bahn dieses Punktes ist also zweielementig.



Damit ist auch die Bahn dieses Punktes zweielementig.



Damit beinhaltet die Bahn diese Punktes drei Punkte. Insgesamt hat $s_2 s_{\widetilde{a},1}$ also Ordnung 4. Weiterhin hat $s_1 s_2$ Ordnung 4. Insgesamt ergibt sich als Graph:



◊

Um Verwirrung vorzubeugen, sei hier bemerkt, dass dieser Graph in obiger Tabelle mit $\widetilde{B_2}$ bezeichnet ist. ◊

7 Der Fundamentalbereich

(7.1) Satz
Der Abschluss $\overline{A_o}$ von A_o ist ein Fundamentalbereich für die Operation von W_a auf V. $\Diamond$

Beweis
Zunächst ist klar, dass jedes $v \in V$ im Abschluss eines Alkovens liegt. Da W_a transitiv operiert, wird jedes Element von V von einem $w \in W_a$ in $\overline{A_o}$ hinein abgebildet. Es bleibt noch zu zeigen, dass nicht zwei unterschiedliche Elemente von $\overline{A_o}$ durch W_a aufeinander abgebildet werden.
Wir nehmen zuerst einmal an, dass v und $v' \in A_o$ unter $w \in W_a$ aufeinander abgebildet werden, also $v = wv'$, und das $l(w) > 0$ bereits minimal ist. Dann gibt es mindestens ein $s \in S_a$ so, dass $l(ws) < l(w)$ ist, und wegen $n(w) = l(w)$ folgt dann bereits, dass $H_s \in L(w^{-1})$ gilt. Somit trennt H_s die Alkoven A_o und $w^{-1}A_o$. Da $v' = w^{-1}v$ in $w^{-1}A_o$ liegt, muss für eine primitive Wurzel a im Falle $s = s_a$ bereits $(v, a) \leq 0$ gelten, oder aber $(v, \tilde{a}) \geq 1$, falls $s = s_{\tilde{a},1}$. Aber nach Annahme gilt schon $(v, a) \geq 0$ und $(v, \tilde{a}) \leq 1$, also entweder $(v, a) = 0$ oder $(v, \tilde{a}) = 1$. In jedem Falle erhalten wir jedoch $sv = v$ und damit $wsv = v'$, was aber ein Widerspruch zur Minimalität von w ist. ■

8 Eine Formel für die Ordnung von W

Als Hauptresultat dieses Vortrages wollen wir eine Formel für die Ordnung von W herleiten

(8.1) Definition und Bemerkung
Es sei $f := L/\widehat{L}$, wobei $L = (\check{\Phi})$ und $\widehat{L} = \widehat{L}(\check{\Phi})$ die Gitter vom Anfang des Vortrages sind. Dann nennt man f auch den *Zusammenhangsindex*.
Weiterhin ist bereits bekannt, dass wir die größte Wurzel $\tilde{a}$ als Linearkombination der positiven Wurzeln darstellen können, also existiert eine Folge $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$, so dass

$$\tilde{a} = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i,$$

wobei $\Delta = \{a_1, \ldots a_n\}$ ist. Die Folge $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$ kann mit Mitteln aus früheren Vorträgen berechnet werden und weiter ist $c_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ für alle $1 \leq i \leq n$. $\Diamond$

(8.2) Satz
Falls W eine irreduzibele Weyl-Gruppe von Rang n ist, so ist

$$|W| = n! \cdot c_1 \cdots c_n \cdot f,$$

wobei f und die Folge $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$ wie oben gewählt sind. $\Diamond$

Beweis
Wir werden für diesen Beweis auf die Maßtheorie zurückgreifen. Die Idee ist, die Volumina zweier Fundamentalbereiche von W in V zu vergleichen. Wir wollen von vorneherein V mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Da Hyperebenen als Untermannigfaltigkeiten und somit Nullmengen bezüglich des Lebesgue-Maßes sind, wollen wir im weiteren Verlauf die Wände der Alkoven stillschweigend ignorieren.
Seien $\breve{\varpi}_i$ die Basisvektoren von $\widehat{L}$ dual zu $a_i \in \Delta$. Dann definieren wir

$$P := \{v \in V : 0 < (v, a_i) < 1 \text{ für alle } i\}$$

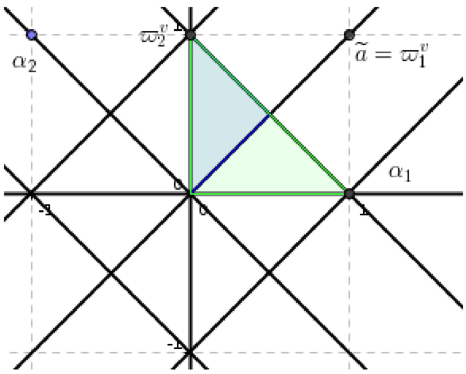
als das offene Parallepepid, das durch die Basisvektoren $\breve{\varpi}_i$ konvexkombiniert wird. Da P genau durch einige der Wände aus $\mathcal{H}$ beschränkt wird, ist klar, dass P die Vereinigung spezieller Alkoven inklusive A_o ist. Darüberhinaus bildet P zusammen mit einem Teil seines Abschlusses einen Fundamentalbereich für die Translationsgruppe bezüglich des Gitters $\widehat{L}$.
Nun wollen wir A_o mit P vergleichen. Da $(\breve{\varpi}_i, a_j) = \delta_{i,j}$ ist, erkennt man, dass die Eckpukte von P genau 0 und die Punkte $\frac{1}{c_i}\breve{\varpi}_i$ sind. Dies sind auch die Punkte, wenn man alle bis auf eine Hyperebene in S_a schneidet.
Aus der Analysis ist bekannt, dass der Standardsimplex im $\mathbb{R}^n$ das Maß $\frac{1}{n!}$ besitzt. Wir haben fast diesen Simplex vorliegen, nur, dass die entsprechende Basis in unserem Fall um $\frac{1}{c_i}$ gestaucht wurde, weswegen das Volumen mit dem Produkt dieser Faktoren multipliziert werden muss.
Ein Basiswechsel in die Basis $(\breve{\varpi}_i)_{1\leq i\leq n}$ ändert das Volument nur um den Betrag der Determinante der Basiswechselmatrixl allerdings tritt dieser Faktor sowohl in Zähler als auch im Nenner auf, hat also keine Wirkung auf den Quotienten. Also ist nur der Stauchungsfaktor der Faktor, der beim Vergleich von P mit dem Einheitsparallelpepid. Also ist folglich

$$\frac{vol(P)}{vol(A_o)} = n! \cdot c_1 \cdots c_n.$$

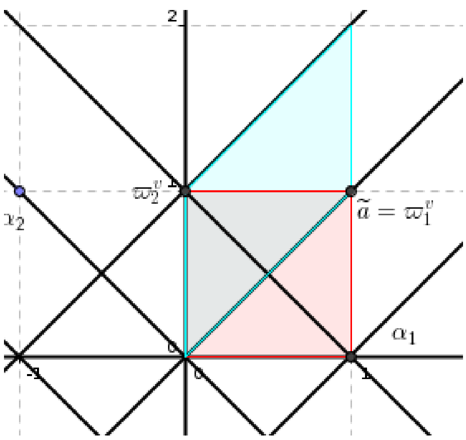
Nun wollen wir dieses Verhältnis berechnen, indem wir die Anzahl der Alkoven, die P enthält, berechnen. Wir behaupten vorab, dass dies genau $\frac{|W|}{f}$ ist, denn das ergibt genau die geforderte Formel für die Ordnung von $|W|$.
Hierzu betrachten wir alle Elemente von $\widetilde{W_a}$, die A_o in das Parallelpiped P hinein abbilden. Jedes dieser Elemente können wir als Produkt einer Translation $\mu \in \widehat{L}$ mit einem $w \in W$ schreiben.
Seien also jetzt $w \in W$ und $\lambda \in A_o$ fest, dann schreiben wir die Translation $\mu = \sum b_i \varpi_i$ als Summe über die Basisvektoren von $\widehat{L}$. Falls also die Translation μ den Punkt $w\lambda$ nach P abbildet, so liegt $(w\lambda + \mu, a_i)$ für alle i zwischen 0 und 1, beziehungsweise zwischen -1 und 0. Weiterhin ist auch $(w\lambda, a_i) = (\lambda, w^{-1}a_i)$ ein Element von $[0, 1]$, falls $w^{-1}a_i$ positiv ist, oder aber in $[-1, 0]$, falls $w^{-1}a_i$

negativ ist, da λ in A_o liegt. Weiterhin sind auch alle diese Werte erreichbar, indem man v entsprechend variiert.
Andererseits ist $(\mu, a_i) = b_i \in \mathbb{Z}$, also kann $(w\lambda + \mu, a_i)$ nur zwischen 0 und 1 liegen, wenn $b_i = 0$ für $w^{-1}a_i > 0$ ist, oder $b_i = 1$ falls $w^{-1}a_i < 0$.
Nun sei $\check{\rho_\omega}$ die Summe derjenigen $\check{\varpi}_i$, für die $w^{-1}a_i < 0$ ist. Dann haben wir gerade gezeigt, dass $t(\check{\rho_\omega})w$ das eindeutige Element von $\widehat{W_a}$ ist, dass w beinhaltet und A_o nach P hinein abbildet.
Sei Ω diejenige Untergruppe, die A_o stabilisiert. Dann gilt $|\Omega| = f$. Außerdem bildet jedes Produkt aus einem Element von Ω mit einem $t(\check{\rho_\omega})w$ wie oben wieder A_o nach P hinein ab. Andererseits unterscheiden sich zwei Elemente, die A_o auf den selben Alkoven abbildet offensichtlich nur um ein Element von Ω. Dann folgt, dass die Anzahl der disjunkten Alkoven in P, also die Anzahl der unterschiedlichen Bilder von A_o unter W_a, genau $\frac{|W|}{f}$ ist. ■

(8.3) Beispiel
Auch dieses Beispiel wollen wir uns wieder an der $\widetilde{D_8}$ veranschaulichen.
Der Standardsimplex und der Alkoven A_o sind die hier abgebildeten Mengen:



Die Mengen P und das Standardparallelpiped sind diese Mengen:



Hierbei ist $\widetilde{a} = 2a_1 + a_2$, also $c_1 = 2$ und $c_2 = 1$ und man sieht, dass

$$vol(A_o) = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{1}{c_1} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{1}{4}$$

ist, und offensichtlich auch $vol(P) = 1$ gilt. Beides erkennt man auch anhand der Grafiken. Entsprechend erhalten wir $\frac{|D_8|}{f} = 4$.
Nun betrachten wir die zugehörigen Gitter $L = L(\check{\Phi})$ und $\widehat{L}$. Zunächst ist L der $\mathbb{Z}$-Span von Φ. Aus einem vorigen Vortrag wisen wir bereits, dass f genau die Determinante der Matrix der Cartan-Zahlen entspricht. Diese Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und hat Determinante 2.
Wir erhalten $f = 2$ und damit $D_8 = f \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot n! = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8$ wie erwartet.$\diamondsuit$