Endliche Spiegelungsgruppen

Vortrag zum ersten Kapitel von Humphreys(2), 16.11.2012

Nadine Friesen und Antje Tasche

(5.1) Lemma
Es gilt:

1. $l(w) = 1 \Leftrightarrow w = s_a, a \in \Delta$.
2. $l(w) = l(w^{-1})$.
3. $det(w) = (-1)^{l(w)}$.
4. $l(ww') \equiv (l(w) + l(w'))mod\ 2$.

(5.2) Definition
Wir bezeichnen mit $n(w) := |\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)|$ die Anzahl der positiven Wurzeln aus Π, die von w auf eine negative abgebildet werden.

(5.3) Lemma
Es sei $a \in \Delta$ und $w \in W$

1. $n(w) = n(w^{-1})$.
2. $wa > 0 \Rightarrow n(ws_a) = n(w) + 1$.
3. $wa < 0 \Rightarrow n(ws_a) = n(w) - 1$.
4. $w^{-1}a > 0 \Rightarrow n(s_a w) = n(w) + 1$.
5. $w^{-1}a < 0 \Rightarrow n(s_a w) = n(w) - 1$.

(5.4) Korollar
Für alle $w \in W$ gilt $n(w) \leqslant l(w)$

(6.1) Satz
Es sei Δ ein beliebiges, aber festes einfaches System. Wir schreiben ein $w \in W$ als $w = s_1 * \cdots * s_r (s_i = s_{a_i}$ mit $a_i \in \Delta$, wobei Wiederholungen erlaubt sind). Angenommen, es gelte $n(w) < r$. Dann gibt es Indizes $1 \leqslant i < j \leqslant n$, für die gilt:

1. $a_i = (s_{i+1} \ldots s_{j-1})a_j$.
2. $s_{i+1}s_{i+2} \ldots s_j = s_i s_{i+1} \ldots s_{j-1}$.
3. (**Auslassbedingung**)$w = s_1 \ldots \widetilde{s_i} \ldots \widetilde{s_j} \ldots s_r$, wobei die Tilden die Auslassung des jeweiligen Elements markieren.

(6.2) Korollar
Für $w \in W$ gilt $n(w) = l(w)$.

(6.3) Folgerung
(**Austauschbedingung**)Es sei $w = s_1 \dots s_r$ ein nicht unbedingt reduziertes Produkt aus einfachen Spieglungen. Genau dann wenn es eine einfache Spiegelung s_a gibt, so dass $l(ws_a) < l(w)$ ist, gibt es einen Index i mit $w = s_1 \dots \widetilde{s_i} \dots s_r s$.

(7.1) Satz
Es sei Δ ein beliebiges, aber festes einfaches System und Π das zugehörige positive System. Dann ist Folgendes äquivalent:

1. $w\Pi = \Pi$.
2. $w\Delta = \Delta$.
3. $n(w) = 0$.
4. $l(w) = 0$.
5. $w = 1$.

(7.2) Folgerung
Es existiert genau ein Element, so dass $w\Pi = -\Pi$ ist. Außerdem ist dessen Länge größer als die aller anderen Elemente aus W und es ist zu sich selbst invers.

(8.1) Satz
Wir halten ein einfaches System Δ fest. Dann ist W erzeugt von $S := \{s_a | a \in \Delta\}$ und ist bestimmt durch die Relationen $(s_a s_b)^{ord(s_a s_b)} = 1$.

(9.1) Satz
Wir halten ein einfaches System Δ und die zugehörige Menge der Spiegelungen S fest. Ist $I \subset S$, so definieren wir Φ_I als Einschränkung von Φ auf V_I, wobei V_I, der von Δ_I aufgespannte Unterraum von V ist.

1. Φ_I ist ein Wurzelsystem in V(und damit auch in V_I) mit einfachem System Δ_I und zugehöriger Spiegelungsgruppe W_I.
2. Betrachten wir die Längenfunktion l_I in Relation zum einfachen System Δ_I der Spiegelungsgruppe W_I, so ist $l_I = l$ in W_I (mit l als der Längenfunktion von W).
3. Ist $w \in W$, so gibt es ein eindeutiges $u \in W_I$ und ein eindeutiges $v \in W^I$ mit $w = uv$ und es gilt $l(w) = l(u) + l(v)$, außerdem ist u das kleinste Element in der Restklasse wW_I.