Coxetergruppen

Ausarbeitung zum Seminar zur Gruppentheorie, 11.01.2013

Nadine Friesen und Antje Tasche

In unserer Ausarbeitung beschäftigen wir uns damit, wie man Coxetergruppen mit endlichem Erzeugendensystem S charakterisieren kann. Als Grundlage hierzu dient das fünfte Kapitel des Buchs *Reflection groups and Coxeter groups* von James E. Humphreys.

§1 Coxetersysteme

Zunächst wollen wir mit einigen größtenteils bereits erwähnten Definitionen beginnen.

(1.1) Definition
Ein *Coxetersystem* ist ein Paar (W, S), wobei W eine Gruppe ist, die von einer Menge $S \subset W$ erzeugt wird. Für alle $s, s' \in S$ gilt einzig die Relation

$$(ss')^{m(s,s')} = 1, \tag{1}$$

mit $m(s,s) = 1, m(s,s') \geqslant 2$ für $s \neq s'$. Falls für s, s' keine solche Relation gilt, schreiben wir $m(s,s') = \infty$. Das heißt wir können hier auch unendliche Gruppen erhalten, was bei den Spiegelungsgruppen durch die zusätzliche Voraussetzung, dass $m(s,s') < \infty$ ist, nicht geschehen konnte. ◇

Formeller können wir W als F/N betrachten mit der auf S freien Gruppe F und der normalen Untergruppe N, die von allen Elementen $(ss')^{m(s,s')}$ erzeugt wird, falls $m(s,s') < \infty$.

(1.2) Definition
Wir bezeichnen $|S|$ als den *Rang* von (W, S) und W unter diesen Voraussetzungen als *Coxetergruppe*. ◇

Im Weiteren sei S endlich. Jetzt können wir das bereits Bekannte zu Spiegelungsgruppen und affinen Weylgruppen verallgemeinern und Coxetersysteme genauer betrachten. Es ist zum Beispiel möglich, sich die Relationen der Gruppe als *Coxetergraph* oder als Matrix zu veranschaulichen, bei der die Einträge in $\mathbb{Z} \cup \infty$ liegen.

(1.3) Beispiel
Betrachten wir beispielsweise die unendliche Diedergruppe D_∞, die von der Menge $S = \{s_1, s_2\}$ erzeugt wird und für die $m(s_1, s_1) = 1, m(s_2, s_2) = 1$ und $m(s_1, m_2) = \infty$ gilt. Die zugehörige Matrix hat die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \infty \\ \infty & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Die Coxetergruppen, in denen wie für D_∞ auch $m(s, s') = \infty$ für alle $s \neq s'$ gilt, werden universelle Coxetergruppen genannt. ◇

(1.4) Lemma
Es gibt einen eindeutigen Epimorphismus $\epsilon : W \to \{1, -1\}$, der jeden Erzeuger $s \in S$ auf -1 schickt. Somit liegen alle $(s, s')^{m(s,s')}$ im Kern und wir erhalten eine Verallgemeinerung der Determinanten in der $O(V)$ beziehungsweise des Vorzeichens der symmetrischen Gruppe. ◇

§ 2 Längenfunktion

(2.1) Definition
Auch für Coxetergruppen definieren wir eine *Länge* $l(w)$, die weiterhin die minimale Anzahl r von Erzeugern angibt, die nötig sind, um w als $w = s_1 \dots s_r$ zu schreiben, wobei $s_i \in S$ ist und $s_i = s_j$ erlaubt ist. Dann wird jede Schreibweise von w als Produkt von r Elementen aus S als *reduziert* bezeichnet. Es wird $l(1) = 0$ gesetzt. ◇

(2.2) Lemma
Ist $w = s_1 \dots s_i \dots s_j \dots s_r$ ein reduzierter Ausdruck für w, so ist $l(w' = s_i \dots s_j) = j - i + 1$ ◇

Beweis
Wir beweisen das Lemma durch Kontraposition. Sei $w' = s_i \dots s_j$ nicht reduziert. Dann existiert ein Ausdruck für w' mit $l(w') < j - i + 1$. Dieser lässt sich dann aber auch in w für $s_i \dots s_j$ einsetzen und somit ist w nicht reduziert. □

(2.3) Lemma
Es gelten die folgenden Eigenschaften der Längenfunktion

1. $l(w) = l(w^{-1})$,
2. $l(w) = 1 \Leftrightarrow w \in S$,

3. $l(ww') \leqslant l(w) + l(w')$,
4. $l(ww') \geqslant l(w) - l(w')$,
5. $l(w) - 1 \leqslant l(ws) \leqslant l(w) + 1$,
6. $\epsilon(w) = (-1)^{l(w)}$,
7. $l(ws) = l(w) \pm 1$. $\diamond$

Beweis
1., 2. sind trivial.

3. Falls $w = s_1 \dots s_r$ und $w' = s'_1 \dots s'_p$ ist, hat das Produkt $ww' = s_1 \dots s_r s'_1 \dots s'_p$ maximal Länge $r + p$.

4. Mit 3. gilt $l(w) = l((ww')w'^{-1}) \leqslant l(ww') + l(w'^{-1}) \Leftrightarrow l(ww') \geqslant l(w) - l(w')$.

5. folgt aus 2., 3., 4. mit $w' = s$.

6. $\epsilon(w) = \epsilon(s_1) \dots \epsilon(s_r) = (-1)^r = (-1)^{l(w)}$.

7. Mit $\epsilon(ws) = -\epsilon(w)$ folgt $l(ws) \neq l(w)$ und damit mit 5., dass $l(ws) = l(w) \pm 1$ ist.

§3 Geometrische Darstellung von W

Um zu einem Coxeter-System (W, S) eine treue Darstellung von W zu finden, so dass W von Spiegelungen erzeugt wird, genügt es nicht mehr, die orthogonalen Spiegelungen im Euklidischen Vektorraum zu betrachten, sondern wir wollen von nun an unter einer Spiegelung etwas allgemeiner Folgendes verstehen:

(3.1) Definition
Eine *Spiegelung* ist eine lineare Abbildung, die eine Hyperebene punktweise fest lässt und einen Vektor ungleich Null auf sein Negatives schickt. $\diamond$

Es entfällt also die Eigenschaft der Orthogonalität. Des weiteren sei V nun ein reeller, $|S|$-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\{\alpha_s \mid s \in S\}$. Auf V definieren wir eine symmetrische Bilinearform B durch

$$B(\alpha_s, \alpha_{s'}) = -\cos\left(\frac{\pi}{m(s, s')}\right),$$

wobei $B(\alpha_s, \alpha_{s'}) = -1$ gelten soll, falls $m(s, s') = \infty$ ist. Es gilt $B(\alpha_s, \alpha_s) = 1$ und $B(\alpha_s, \alpha_{s'}) \leq 0$ für $s \neq s'$. Da $B(\alpha_s, \alpha_s) \neq 0$ gilt, ist α_s nicht isotrop und der zu α_s bezüglich B orthogonale Unterraum H_s ist ein Komplement zu $\mathbb{R}\alpha_s$.

Zu $s \in S$ definieren wir $\sigma_s : V \to V$ durch

$$\sigma_s(\lambda) = \lambda - 2B(\alpha_s, \lambda)\alpha_s.$$

(3.2) Lemma
Die Abbildung σ_s hat die Eigenschaften

1. $\sigma_s(\alpha_s) = -\alpha_s$ und σ_s fixiert H_s punktweise (σ_s ist also eine Spiegelung),
2. $B(\sigma_s(\lambda), \sigma_s(\mu)) = B(\lambda, \mu)$ für alle $\lambda, \mu \in V$,
3. die Ordnung von σ_s in $GL(V)$ ist zwei. ◇

Beweis
1. Folgt sofort aus der Definition.
2. Für $\lambda, \mu \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
B(\sigma_s(\lambda), \sigma_s(\mu)) &= B(\lambda - 2B(\alpha_s, \lambda)\alpha_s, \mu - 2B(\alpha_s, \mu)\alpha_s) \\
&= B(\lambda, \mu - 2B(\alpha_s, \mu)\alpha_s) - 2B(\alpha_s, \lambda)B(\alpha_s, \mu - 2B(\alpha_s, \mu)\alpha_s) \\
&= B(\lambda, \mu) - 2B(\alpha_s, \mu)B(\lambda, \alpha_s) - 2B(\alpha_s, \lambda)B(\alpha_s, \mu) + 4B(\alpha_s, \lambda)B(\alpha_s, \mu) \\
&= B(\lambda, \mu).
\end{aligned}$$

3. Für $\lambda \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
\sigma_s(\sigma_s(\lambda)) &= \sigma_s(\lambda - 2B(\alpha_s, \lambda)\alpha_s) \\
&= \sigma_s(\lambda) - 2B(\alpha_s, \lambda)\sigma_s(\alpha_s) \\
&= \sigma_s(\lambda) - 2B(\alpha_s, \lambda)(\alpha_s - 2B(\alpha_s, \alpha_s)\alpha_s) \\
&= \sigma_s(\lambda) - 2B(\alpha_s, \lambda)(\alpha_s - 2\alpha_s) \\
&= \lambda - 2B(\alpha_s, \lambda)\alpha_s + 2B(\alpha_s, \lambda)\alpha_s \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$ □

(3.3) Lemma
Es gibt einen eindeutigen Homomorphismus $\sigma : W \to GL(V), s \mapsto \sigma_s$, der *geometrische Darstellung* von W genannt wird. Für jedes Paar $s, s' \in S$ ist die Ordnung des Elements ss' genau $m(s, s')$. ◇

Beweis
Wir zeigen, dass

$$(\sigma_s \sigma_s')^{m(s,s')} = 1$$

für alle $s \neq s'$ gilt. Definiere $k := m(s,s')$ und $V' := \mathbb{R}\alpha_s \oplus \mathbb{R}\alpha_{s'}$. Die Bilinearform B ist positiv semidefinit, denn für $\lambda = a\alpha_s + b\alpha_{s'} \in V'$ gilt

$$\begin{aligned} B(\lambda,\lambda) &= a^2 B(\alpha_s,\alpha_s) + 2abB(\alpha_s,\alpha_{s'}) + b^2 B(\alpha_{s'},\alpha_{s'}) \\ &= a^2 - 2ab\cos\left(\frac{\pi}{k}\right) + b^2 \\ &= (a - b\cos\left(\frac{\pi}{k}\right))^2 + b^2\sin^2\left(\frac{\pi}{k}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Falls $k < \infty$ ist, gilt $\sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \neq 0$ und damit dass B auf V' positiv definit ist. Daher ist B genau dann nicht ausgeartet, wenn $k < \infty$ gilt, denn im Fall $k = \infty$ ist $B(\alpha_s + \alpha_{s'}, \alpha_s + \alpha_{s'}) = 0$, also $\alpha_s + \alpha_{s'}$ isotrop. Des Weiteren folgt aus der Definition von σ_s und $\sigma_{s'}$, dass $\sigma_s\sigma_{s'}(V') \subseteq V'$ gilt. Daher betrachten wir im Folgenden $\sigma_s\sigma_{s'}$ als Abbildung auf V'. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Erster Fall: $k < \infty$. Es liegt die uns bereits bekannte Situation vor, dass die Bilinearform B positiv definit ist und wir uns im Euklidischen Vektorraum bewegen. Die Spiegelungen σ_s und $\sigma_{s'}$ sind orthogonal. Es gilt $B(\alpha_s,\alpha_{s'}) = -\cos(\pi/k) = \cos(\pi - (\pi/k))$. Der Winkel zwischen $\mathbb{R}^+\alpha_s$ und $\mathbb{R}^+\alpha_{s'}$ beträgt also $\pi - (\pi/k)$, womit sich zwischen den Spiegelungsgeraden der Winkel π/k ergibt. Wie wir aus dem ersten Kapitel über Diedergruppen wissen, ist $\sigma_s\sigma_{s'}$ eine Drehung um den Winkel $2\pi/k$ und besitzt daher Ordnung k. Da B auf V' nicht ausgeartet ist, lässt sich V zerlegen in $V = V' \oplus V'^{\perp}$. Weil sowohl σ_s als auch $\sigma_{s'}$ das Komplement $V'^{\perp}$ punktweise fest lassen, muss $\sigma_s\sigma_{s'}$ auf $V'^{\perp}$ die Identität sein und hat daher Ordnung k auf V.

2. Zweiter Fall: $k = \infty$. Es gilt $B(\alpha_s,\alpha_{s'}) = -1$. Für $\lambda = \alpha_s + \alpha_{s'}$ gilt $B(\lambda,\alpha_s) = B(\alpha_s + \alpha_{s'},\alpha_s) = B(\alpha_s,\alpha_s) + B(\alpha_{s'},\alpha_s) = 1 - 1 = 0 = B(\lambda,\alpha_{s'})$ und somit folgt $(\sigma_s\sigma_{s'})(\lambda) = \lambda$. Außerdem ist $(\sigma_s\sigma_{s'})(\alpha_s) = \sigma_s(\alpha_s + 2\alpha_{s'}) = 3\alpha_s + 2\alpha_{s'} = 2\lambda + \alpha_s$. Dadurch ergibt sich für $z \in \mathbb{Z}$, dass $(\sigma_s\sigma_{s'})^z(\alpha_s) = 2z\lambda + \alpha_s$ ist. Also hat $\sigma_s\sigma_{s'}$ unendliche Ordnung auf V' und damit auch auf V.

Da also die Ordnung von $\sigma_s\sigma_{s'}$ in $GL(V)$ genau $m(s,s')$ ist, gilt dies auch für die Ordnung von ss' in W. $\square$

§4 Wurzelsysteme

In diesem Abschnitt werden wir den Begriff des Wurzelsystems für Coxetergruppen einführen und sehen, dass sich auch hier die Wurzeln in positiv und negativ aufteilen lassen.
Im Folgenden verwenden wir die Schreibweise $w(\alpha_s)$ statt $\sigma(w)(\alpha_s)$ für $w \in W$ und $s \in S$.

(4.1) Definition
Als *Wurzelsystem* von W bezeichnen wir die Menge

$$\Phi := \{w(\alpha_s) \mid w \in W, s \in S\}.$$

Die Elemente von Φ nennen wir wie zuvor *Wurzeln*. ◇

Das Wurzelsystem Φ ist also eine Menge von Einheitsvektoren in V bezüglich der Bilinearform B, die von W permutiert werden. Bei den Wurzeln handelt es sich ebenfalls um Einheitsvektoren, da W die Bilinearform B auf V erhält. Es ist $\Phi = -\Phi$, da $s(\alpha_s) = -\alpha_s$ gilt. Weil $\{\alpha_s \mid s \in S\}$ eine Basis von V ist, lässt sich jede Wurzel α eindeutig in der Form

$$\alpha = \sum_{s \in S} c_s \alpha_s$$

mit Koeffizienten $c_s \in \mathbb{R}$ schreiben.

(4.2) Definition
Eine Wurzel α bezeichnen wir als *positiv* (bzw. *negativ*) und schreiben $\alpha > 0$ (bzw. $\alpha < 0$), wenn alle Koeffizienten $c_s \geq 0$ (bzw. $c_s \leq 0$) sind. Außerdem seien

$$\Phi^+ := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha > 0\},$$
$$\Phi^- := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha < 0\}.$$ ◇

(4.3) Definition
Wie im ersten Kapitel definieren wir eine *parabolische Untergruppe* W_I von W als eine Untergruppe von W, die von einer Teilmenge I von S erzeugt wird, also
$W_I := \langle \{s \mid s \in I\} \rangle$. Mit l_I bezeichnen wir die zugehörige Längenfunktion. ◇

Es gilt $l(w) \leq l_I(w)$ für alle $w \in W_I$. Später werden wir sehen, dass sogar Gleichheit erfüllt ist.

(4.4) Satz
Sei $w \in W$ und $s \in S$. Falls $l(ws) > l(w)$ gilt, dann ist $w(\alpha_s) > 0$. Falls $l(ws) < l(w)$ gilt, dann ist $w(\alpha_s) < 0$. ◇

Beweis
Wir beweisen die erste Aussage durch Induktion über $l(w)$. Wir betrachten also zunächst den Fall $l(w) = 0$. Dann ist $w = 1$ und da α_s positiv ist, gilt die Aussage.
Jetzt betrachten wir den Fall $l(w) > 0$. Dann existiert ein $s' \in S$, sodass $l(ws') = l(w) - 1$, denn man kann s' als den letzten Faktor im reduzierten Ausdruck von w wählen. Da nach Voraussetzung $l(ws) > l(w)$ gilt, aber s' so gewählt ist, dass $l(ws') < l(w)$ ist, muss $s \neq s'$ gelten. Nun betrachten wir die parabolische Untergruppe W_I mit $I := \{s, s'\}$. Wir definieren die Menge

$$A := \{v \in W \mid v^{-1}w \in W_I \text{ und } l(v) + l_I(v^{-1}w) = l(w)\}.$$

Es ist $w \in A$. Nun wählen wir $v \in A$ mit minimaler Länge $l(v)$ und definieren $v_I := v^{-1}w \in W_I$. Es gilt also $w = vv_I$ und da $v \in A$ auch $l(w) = l(v) + l_I(v_I)$.
Es ist $ws' \in A$, denn es gilt $(ws')^{-1}w = s'w^{-1}w = s' \in W_I$ und $l(ws') + l_I((ws')^{-1}w) = l(ws') + l_I(s') = (l(w) - 1) + 1 = l(w)$.
Da wir v minimal bezüglich der Länge gewählt haben, gilt $l(v) \leq l(ws') = l(w) - 1$.
Wir möchten die Induktionsvoraussetzung auf das Paar v, s anwenden. Dazu müssen wir aber noch zeigen, dass $l(vs) > l(v)$ gilt. Dazu nehmen wir zunächst an, es würde $l(vs) < l(v)$ gelten, mit Lemma 2.3 also $l(vs) = l(v) - 1$. Dann wäre

$$\begin{aligned}
l(w) = l((vs)(vs)^{-1}w) &\leq l(vs) + l((sv^{-1})w) \text{ [mit Lemma 2.3]} \\
&\leq l(vs) + l_I(sv^{-1}w) \text{ [da } sv^{-1}w \in W_I \text{ und } l \leq l_I] \\
&= (l(v) - 1) + l_I(sv^{-1}w) \\
&\leq l(v) - 1 + 1 + l_I(v^{-1}w) \\
&= l(v) + l_I(v^{-1}w) = l(v) + l_I(v_I) \\
&= l(w)
\end{aligned}$$

Da überall Gleichheit herrschen müsste, würde also $l(w) = l(vs) + l_I(sv^{-1}w)$ gelten und damit wäre $vs \in A$. Wir hatten aber $l(vs) < l(v)$ angenommen, was einen Widerspruch zur minimalen Wahl von v darstellt. Da aber nach Lemma 2.3 $l(vs) = l(v) \pm 1$ gilt, folgt $l(vs) = l(v) + 1$, also gilt $l(vs) > l(v)$, was wir zeigen wollten.
Wir können also die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten $v(\alpha_s) > 0$.
Die gleiche Argumentation auf v und s' angewandt, liefert $l(vs') > l(v)$ und damit, dass $v(\alpha_{s'}) > 0$ gilt.

Des Weiteren muss $l_I(v_I s) \geq l_I(v_I)$ gelten, denn sonst würde sich

$$\begin{aligned} l(ws) = l(vv^{-1}ws) \leq l(v) + l(v^{-1}ws) = l(v) + l(v_I s) \leq l(v) + l_I(v_I s) \\ < l(v) + l_I(v_I) = l(w) \end{aligned}$$

ergeben, aber es ist $l(ws) > l(w)$. Dadurch wissen wir nun, dass jeder reduzierte Ausdruck von v_I in W_I, bei dem es sich um ein alternierendes Produkt aus den Faktoren s und s' handelt, mit s' enden muss. Wir machen wieder eine Fallunterscheidung bezüglich $k := m(s, s')$.

1. Erster Fall: $k = \infty$. Wenn der reduzierte Ausdruck von v_I in W_I aus r Faktoren besteht, gilt

$$\begin{aligned} v_I(\alpha_s) = r\alpha_s + (r+1)\alpha_{s'}, &\text{ falls } r \text{ ungerade ist und} \\ v_I(\alpha_s) = (r+1)\alpha_s + r\alpha_{s'}, &\text{ falls } r \text{ gerade ist,} \end{aligned}$$

   wobei $B(\alpha_s, \alpha_{s'}) = -1$ eingeht. Beispielsweise ergibt sich $s'(\alpha_s) = \alpha_s + 2\alpha_{s'}$, $ss'(\alpha_s) = 3\alpha_s + 2\alpha_{s'}$ und $s'ss'(\alpha_s) = 3\alpha_s + 4\alpha_{s'}$.

2. Zweiter Fall: $k < \infty$. Es gilt, dass der maximale Wert, den l_I annehmen kann, k ist. Denn mit Hilfe der Relationen $(ss')^{k/2} = (s's)^{k/2}$ für gerades k und $(ss')^{(k+1)/2} = (s's)^{(k-1)/2}$ für ungerades k ergibt sich, dass für $l < k < 2l$ gilt

$$\begin{aligned} (ss')^l &= (ss')^{(l-k/2)}(ss')^{k/2} \\ &= (ss')^{(l-k/2)}(s's)^{k/2} = (s's)^{k-l} \text{ im Fall, dass } k \text{ gerade ist und} \\ (ss')^l &= (ss')^{(l-(k+1)/2)}(ss')^{(k+1)/2} \\ &= (ss')^{(l-(k+1)/2)}(s's)^{(k-1)/2} = (s's)^{k-l} \text{ im Fall, dass } k \text{ ungerade ist.} \end{aligned}$$

   Durch Verwenden dieser Relationen lässt sich jedes Element aus W_I auf einen Ausdruck mit höchstens Länge k reduzieren und die reduzierte Darstellung eines Elements der Länge k in W_I endet mit s. Daher lässt sich v_I als Produkt von weniger als $k/2$ Faktoren ss' schreiben mit eventuell noch einem Faktor s' zu Beginn. Wir werden nun sehen, dass sich auch in diesem Fall $v_I(\alpha_s)$ als eine nicht negative Linearkombination von α_s und $\alpha_{s'}$ schreiben lässt.
   Wir befinden uns wieder im Euklidischen Vektorraum. Der Winkel zwischen den Einheitsvektoren α_s und $\alpha_{s'}$ beträgt $\pi - \pi/k$. Durch ss' wird α_s um den Winkel $2\pi/k$ in Richtung $\alpha_{s'}$ rotiert. Daher können die Rotationen, aus denen sich v_I zusammensetzt, α_s höchstens um den Winkel $(\frac{k}{2} - 1)\frac{2\pi}{k} = \pi - \frac{2\pi}{k}$ drehen, sodass der Vektor immer noch im positiven Kegel, der durch α_s und $\alpha_{s'}$

aufgespannt wird, liegt. Falls v_I noch mit einem zusätzlichen s' beginnt, liegt auch der gespiegelte Vektor immer noch im positiven Kegel, da der Winkel zwischen α_s und der Spiegelungsgeraden $(\pi - (\pi/k)) - (\pi/2) = (\pi/2) - (\pi/k)$ beträgt (die Differenz vom Winkel zwischen α_s und $\alpha_{s'}$ und dem Winkel zwischen $\alpha_{s'}$ und der zugehörigen Spiegelungsgeraden).

Insgesamt ergibt sich somit in allen Fällen eine Darstellung von $v_I(\alpha_s)$ in der Form $v_I(\alpha_s) = a\alpha_s + b\alpha_{s'}$ mit $a, b \geq 0, (a, b) \neq (0, 0)$. Damit erhält man zusammen mit $v(\alpha_s) > 0$ und $v(\alpha_{s'}) > 0$, dass

$$w(\alpha_s) = vv_I(\alpha_s) = v(a\alpha_s + b\alpha_{s'}) = av(\alpha_s) + bv(\alpha_{s'}) > 0$$

ist, was zu zeigen war.
Die zweite Aussage des Satzes folgt, indem man die erste Aussage auf ws anstelle von w anwendet: Die Voraussetzung $l(ws) < l(w)$ lässt sich umschreiben zu $l(ws) < l((ws)s)$ und mit der ersten Aussage erhält man $ws(\alpha_s) > 0$, also $w(-\alpha_s) > 0$ beziehungsweise $w(\alpha_s) < 0$. □

Wie bei positiven und negativen Systemen von Spiegelungsgruppen, lässt sich daher auch bei Coxetergruppen Φ als disjunkte Vereinigung schreiben.

(4.5) Folgerung
Jede Wurzel $\alpha \in \Phi$ ist entweder positiv oder negativ, also $\Phi = \Phi^+ \dot\cup \Phi^-$. ◇

Beweis
Für $\alpha \in \Phi$ existieren nach Definition ein $w \in W$ und ein $s \in S$ mit $\alpha = w(\alpha_s)$. Es gilt entweder $l(ws) > l(w)$ oder $l(ws) < l(w)$. Mit Satz 4.4 folgt $\alpha = w(\alpha_s) > 0$ beziehungsweise $\alpha = w(\alpha_s) < 0$. □

(4.6) Korollar
Die Darstellung $\sigma : W \to GL(V)$ ist treu. ◇

Beweis
Sei $w \in \text{Kern}(\sigma)$. Wäre $w \neq 1$, dann gäbe es ein $s \in S$, für das $l(ws) < l(w)$ gilt, da man s als den letzten Faktor im reduzierten Ausdruck von w wählen kann. Mit Satz 4.4 folgt $w(\alpha_s) < 0$. Aber da $w \in \text{Kern}(\sigma)$ liegt, ist $w(\alpha_s) = \alpha_s > 0$. Es muss also $w = 1$ gelten. □

§ 5 Parabolische Untergruppen

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass es sich bei der parabolischen Untergruppe W_I mit $I \subset S$ um eine Coxetergruppe handelt.
Dazu definieren wir eine abstrakte Coxetergruppe $\overline{W_I}$ durch

$$\overline{W_I} := \langle \{s_i \mid i \in I\} =: S_I \mid (ss')^{m(s,s')}, s, s' \in S_I \rangle.$$

Die geometrische Darstellung dieser Gruppe $\overline{W_I}$ lässt sich damit identifizieren, wie die Gruppe, die von allen σ_s mit $s \in S$ erzeugt wird, auf dem Unterraum V_I von V, der von allen α_s mit $s \in I$ erzeugt wird, wirkt. Dies liegt daran, dass die Einschränkung der Bilinearform B auf V_I mit der Form B_I von $\overline{W_I}$ übereinstimmt, da diese nur von den Relationen $m(s,s')$ abhängt. Die Gruppe, die von den σ_s erzeugt wird, ist nur die Einschränkung der Gruppe $\sigma(W_I)$ auf V_I. Andererseits lässt sich eine kanonische Abbildung von $\overline{W_I}$ nach W_I definieren, indem man die Erzeuger von $\overline{W_I}$ auf die Erzeuger von W_I als Untergruppe abbildet. Dadurch ergibt sich das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\overline{W_I} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{GL}(V_I) \\
& W_I \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Da die Abbildung von $\overline{W_I}$ nach $GL(V_I)$ nach Korollar 4.6 injektiv ist, ist auch die Abbildung von $\overline{W_I}$ nach W_I injektiv und damit insgesamt bijektiv. Also sind $\overline{W_I}$ und W_I isomorph und W_I ist daher tatsächlich eine Coxetergruppe.

(5.1) Satz

1. Für jede Teilmenge I von S ist (W_I, S) mit den Werten $m(s,s')$ ein Coxetersystem.

2. Gelte $I \subseteq S$. Falls $w = s_1 \cdots s_r$ mit $s_i \in S$ ein reduzierter Ausdruck ist und $w \in W_I$ gilt, dann sind alle $s_i \in I$. Insbesondere gilt $l(w) = l_I(w)$ für alle $w \in W_I$ und $W_I \cap S = I$.

3. Die Zuordnung $I \mapsto W_I$ definiert einen Verbandsisomorphismus zwischen der Menge der Teilmengen von S und der Menge der Untergruppen W_I von W.

4. S ist ein minimales Erzeugendensystem von W. ◇

Beweis

1. Haben wir gerade gezeigt.

2. Die zweite Aussage beweisen wir durch Induktion über $l(w)$. Falls $l(w) = 0$ ist, muss $w = 1$ gelten und die Aussage ist klar.
   Sei nun $l(w) > 0$. Definiere $s := s_r$. Dann gilt $l(ws) < l(w)$ und mit Satz 4.4 folgt $w(\alpha_s) < 0$. Da $w \in W_I$ ist, lässt es sich schreiben als $w = t_1 \cdots t_q$ mit allen $t_i \in I$. Damit ergibt sich
   $$w(\alpha_s) = \alpha_s + \sum_{i=1}^{q} c_i \alpha_{t_i}$$
   mit Koeffizienten $c_i \in \mathbb{R}$. Da $w(\alpha_s) < 0$ gilt, muss es ein i geben, sodass $s = t_i$ gilt, also liegt $s \in I$. Daher gilt $ws = s_1 \cdots s_{r-1}$ liegt in W_I und es handelt sich um einen reduzierten Ausdruck. Wir können die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten, dass alle s_i Elemente von I sind.
   Dass $l(w) = l_I(w)$ für alle $w \in W_I$ und $W_I \cap S = I$ gilt, folgt direkt.

3. Seien $I, J \subseteq S$. Falls $W_I \subseteq W_J$ gilt, dann folgt mit der zweiten Aussage, dass $I = W_I \cap S \subseteq W_J \cap S = J$ ist. Also gilt $I \subseteq J$ genau dann, wenn $W_I \subseteq W_J$ ist. Die Untergruppe $W_{I \cup J}$ von W wird von W_I und W_J erzeugt. Außerdem folgt mit der zweiten Aussage, dass $W_{I \cap J} = W_I \cap W_J$. Die eine Teilmengenbeziehung ist klar. Für die andere Teilmengenbeziehung sei $w \in W_I \cap W_J$ und $w = s_1 \cdots s_r$ mit $s_i \in S$ ein reduzierter Ausdruck von w. Mit der zweiten Aussage folgt mit $w \in W_I$, dass alle $s_i \in I$ liegen und mit $w \in W_J$, dass alle $s_i \in J$ liegen. Also $w \in W_{I \cap J}$.
   Dies liefert insgesamt den gewünschten Verbandsisomorphismus.

4. Nehmen wir an, dass eine Teilmenge I von S die Gruppe W erzeugt, also $W_I = W = W_S$. Mit Hilfe des Verbandsisomorphismus aus der dritten Aussage folgt $I = S$. □

§ 6 Geometrische Interpretation der Längenfunktion

Das folgende Lemma zeigt, dass wichtige Eigenschaften der positiven und negativen Wurzeln beziehungsweise der Längenfunktion, die wir von den Spiegelungsgruppen kennen, mit unseren Definitionen für Coxetergruppen verträglich sind.

(6.1) Lemma

1. Wenn $s \in S$ ist, gilt $s(\Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}$.

2. Für jedes $w \in W$ entspricht $l(w)$ der Anzahl der positiven Wurzeln, die von w auf negative Wurzeln abgebildet werden. $\diamond$

Beweis

1. Sei $\alpha \in \Phi$ mit $\alpha > 0$ und $\alpha \neq \alpha_s$. Da alle Wurzeln Einheitsvektoren sind, kann α kein Vielfaches von α_s sein. Daher lässt sich α schreiben als

$$\alpha = \sum_{t \in S} c_t \alpha_t,$$

   wobei alle Koeffizienten nicht negativ sind und für ein $q \neq s$ gilt $c_q > 0$. Wendet man s auf α an, führt dies nur dazu, dass ein Vielfaches von α_s in der Summe hinzu kommt. Der Koeffizient c_q von α_q bleibt hingegen strikt positiv. Also kann $s(\alpha)$ keine negative Wurzel sein und liegt somit in Φ^+. Daher gilt insbesondere auch $s(\alpha) \neq \alpha_s$. Es folgt $s(\Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}) \subseteq \Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}$. Wendet man nun s auf beide Seiten an, ergibt sich die umgekehrte Teilmengenbeziehung.

2. Zu $w \in W$ bezeichne $n(w)$ die Anzahl der positiven Wurzeln, die von w auf negative Wurzeln abgebildet werden, also

$$n(w) = |\Phi^+(w)|, \text{ wobei } \Phi^+(w) := \Phi^+ \cap w^{-1}(\Phi^-).$$

   Es ist zunächst nicht offensichtlich, dass $n(w)$ endlich ist, folgt aber am Ende aus $n(w) = l(w)$.
   Mit der ersten Aussage folgt $n(s) = 1$ für alle $s \in S$.
   Wir zeigen zunächst, dass für $s \in S$ und $w \in W$ gilt, dass aus $w(\alpha_s) > 0$ folgt $n(ws) = n(w) + 1$ und aus $w(\alpha_s) < 0$ folgt $n(ws) = n(w) - 1$. Im Fall $w(\alpha_s) > 0$ folgt mit der ersten Aussage, dass $\Phi^+(ws) = s(\Phi^+(w)) \dot\cup \{\alpha_s\}$, im Fall $w(\alpha_s) < 0$ erhält man $\Phi^+(ws) = s(\Phi^+(w) \setminus \{\alpha_s\})$ mit $\alpha_s \in \Phi^+(w)$.
   Nun zeigen wir durch Induktion über $l(w)$, dass $n(w) = l(w)$ für alle $w \in W$ gilt. Für $l(w) = 0$, also $w = 1$, ist die Aussage klar. Mit der ersten Aussage gilt dies auch für $l(w) = 1$. Nach Satz 4.4 gilt $l(ws) = l(w) + 1$ nur dann, wenn $w(\alpha_s) > 0$ ist beziehungsweise $l(ws) = l(w) - 1$ nur dann, wenn $w(\alpha_s) < 0$ ist. Zusammen mit dem gerade Gezeigten ergibt sich die Behauptung. $\square$

§7 Wurzeln und Spiegelungsgruppen

Wir können jetzt mit jeder Wurzel $a \in \Phi$ eine Spiegelung in $GL(V)$ identifizieren, indem wir betrachten, wie wsw^{-1} auf V abbildet. sei $\lambda \in V$ und $a = w(a_s)$ für ein

$w \in W, s \in S$. Wir sehen, dass

$$\begin{aligned} wsw^{-1}(\lambda) &= w[w^{-1}(\lambda) - 2B(w^{-1}(\lambda), a_s)a_s] \\ &= \lambda - 2B(w^{-1}(\lambda), a_s)w(a_s) \\ &= \lambda - 2B(\lambda, w(a_s))w(a_s) \\ &= \lambda - 2B(\lambda, a)a \end{aligned} \tag{3}$$

einer Spiegelung aus Paragraph **??** ähnelt.

(7.1) Folgerung
Somit hängt wsw^{-1} nur von dem zugehörigen a, aber nicht von der genauen Wahl von s oder w ab, weshalb wir es als s_a bezeichnen werden. Mit $s_a(a) = a - 2B(a,a)a = a - 2a = -a$ und $s_a(\lambda) = \lambda - 2B(\lambda, a)a = \lambda$ für alle λ aus der Hyperebene, für die $B(\lambda, a) = 0$ gilt, ist leicht erkennbar, dass es sich bei s_a um eine Spiegelung handelt.$\diamond$

Wir setzen $T := \{s_a | a \in \Phi\} = \bigcup_{w \in W} wSw^{-1}$.

Da aus $s_a = s_b$ mit Gleichung 3 folgt, dass $-b = s_a(b) = b - 2B(b,a)a \Leftrightarrow b = B(b,a)a$ und somit $b = a$ gilt, weil beide Einheitsvektoren in Π sind, ist die Identifizierung der Wurzel a mit der Spiegelung s_a bijektiv. (Surjektivität folgt aus der Definition von T.)

(7.2) Lemma
Sei $a, b \in \Phi$. Wenn $b = w(a)$ für ein $w \in W$ gilt, ist $ws_aw^{-1} = s_b$. $\diamond$

Beweis
Mit 3 gilt

$$ws_aw^{-1}(\lambda) = \lambda - 2B(\lambda, w(a))w(a) = \lambda - 2B(\lambda, b)b = s_b. \tag{4}$$

$\square$

(7.3) Satz
Sei $w \in W, a \in \Phi$. Dann ist $l(ws_a) > l(w)$ äquivalent zu $w(a) > 0$. $\diamond$

Beweis
Sei $l(ws_a) > l(w)$. Wir führen eine Induktion über $l(w)$ durch.
(IA) Sei $l(w) = 0$. Somit gilt trivialerweise $1 = l(s_a) > l(1) = 0$.
(IV) Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $l(w) \in \mathbb{N}$.
(IS) Falls $l(w) > 0$, gibt es ein $s \in S$, so dass $l(sw) < l(w)$ ist. Dann erhalten wir $l((sw)s_a) = l(s(ws_a)) \geqslant l(ws_a) - 1 > l(w) - 1$. Somit ist per Induktion $sw(a) > 0$. Angenommen, es gelte $w(a) < 0$. Die einzige negative Wurzel, die von s auf ihr Positives abgebildet wird, ist nach 6.1 $-a_s$. Damit erhalten wir $w(a) = -a_s$. Dann

folgt aber mit $sw(a) = a_s$ aus 7.2, dass $(sw)s_a(sw)^{-1} = s$ und dazu äquivalent $sw = ws_a$ gilt. Das ist ein Widerspruch zu $l(ws_a) > l(w) > l(sw)$. Also gilt $w(a) > 0$.

Die Rückrichtung beweisen wir per Kontraposition. Sei also nun $l(ws_a) < l(w)$. Es gilt jetzt $l((ws_a)s_a) > l(ws_a)$ und somit folgt hier aus der obigen Induktion $ws_a(a) > 0$, also $w(a) < 0$. □

§ 8 Starke Austauschbedingung

Jetzt können wir die bereits bekannte Austauschbedingung für Coxetergruppen verallgemeinern, wobei wir zwischen der Austauschbedingung und der starken Austauschbedingung, die nur $t \in T$, aber nicht $t \in S$ fordert, unterscheiden. Diese Unterscheidung war für Spiegelungsgruppen nicht nötig, da für sie $T = S$ gilt.

(8.1) Satz
Sei $w = s_1 \dots s_r$ (mit $s_i \in S$) nicht unbedingt reduziert. Falls eine Spiegelung $t \in T$ existiert mit $l(wt) < l(w)$, gibt es einen Index i, für den $wt = s_1 \dots \hat{s_i} \dots s_r$ gilt. Falls die Schreibweise für w reduziert ist, ist i eindeutig. ◇

Beweis
Es lässt sich $t = s_a$ schreiben für ein $a \in \Pi$. Da $l(wt) < l(w)$ ist, können wir mit 7.3 folgern, dass $w(a) < 0$. Es gibt, weil $a > 0$ ist, einen Index i mit $s_{i+1} \dots s_r(a) > 0$, aber $s_i \dots s_r(a) < 0$. Aus 6.1 folgt, dass $s_{i+1} \dots s_r(a) = a_{a_i}$ ist. Jetzt sehen wir dank 7.2, dass $(s_{i+1} \dots s_r)t(s_r \dots s_{i+1}) = s_i$ beziehungsweise $wt = s_1 \dots \hat{s_i} \dots s_r$. Angenommen, es gelte $l(w) = r$ und es gäbe zwei Indizes $i < j$ mit $wt = s_1 \dots \hat{s_i} \dots s_r = s_1 \dots \hat{s_j} \dots s_r$. Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir $s_{i+1} \dots s_{j-1} = s_i \dots s_j$, womit wir also $l(w) < r - 1$ hätten, was zum Widerspruch führt. □

Jetzt können wir zeigen, dass auch bei Coxetergruppen eine Auslassbedingung existiert.

(8.2) Satz
Falls $w = s_1 \dots s_r$ und $l(w) < r$ gilt, gibt es Indizes $i < j$ mit $w = s_1 \dots \hat{s_i} \dots \hat{s_j} \dots s_r$.◇

Beweis
Es gilt $l(s_1 \dots s_j) < l(s_1 \dots s_{j-1})$ für ein j. Somit erhalten wir mit der Austauschbedingung, dass ein i existiert, so dass $s_1 \dots s_j = s_1 \dots \hat{s_i} \dots s_{j-1}$. □

§ 9 Poincaré-Reihen

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir das Prinzip der Poincaré-Polynome auf die parabolischen Untergruppen der Coxetergruppe W. Dazu definieren wir uns wie bereits im ersten Kapitel eine Menge

$$W^I := \{w \in W \mid l(ws) > l(w) \text{ für alle } s \in S)\}.$$

Die folgende Aussage aus Kapitel 1 (1.10 c)) lässt sich direkt übernehmen, da der Beweis ebenso für Coxetergruppen funktioniert:
Ist $w \in W$, so gibt es ein eindeutiges $u \in W^I$ und ein eindeutiges $v \in W_I$ mit $w = uv$. Es gilt $l(w) = l(u) + l(v)$. Außerdem ist u das eindeutige Element mit minimaler Länge in der Restklasse wW_I.

Damit erhalten wir eine Verallgemeinerung der Poincaré-Polynome. Wenn W unendlich ist, erhalten wir jedoch eine formale Potenzreihe in der Unbestimmten t. Die Definition erfolgt auf dem bereits bekannten Weg.

(9.1) Definition
Wir bezeichnen

$$W(t) := \sum_{n \geq 0} a_n t^n$$

mit $a_n := |\{w \in W \mid l(w) = n\}|$ als *Poincaré-Reihe* von W. ◇

Dabei ist a_n endlich, weil S endlich ist.

Mit der obigen Aussage aus dem ersten Kapitel folgt wiederum vollkommen analog

$$W(t) = W_I(t)W^I(t).$$

Außerdem gilt, wenn W unendlich ist, dass die Längenfunktion beliebig große Werte annimmt. Wenn W dagegen endlich ist, gibt es ein eindeutiges Element w_0 mit maximaler Länge N, das alle positiven Wurzeln auf negative Wurzeln schickt. Dies folgt aus Lemma 6.1.

Als Notation verwenden wir wieder $(-1)^I$ anstelle von $(-1)^{|I|}$.

(9.2) Lemma

1. Im Ring der formalen Potenzreihen in t gilt für unendliches W die Identität

$$\sum_{I \subseteq S} (-1)^I \frac{W(t)}{W_I(t)} = \sum_{I \subseteq S} (-1)^I W^I(t) = 0.$$

   Ist W endlich, ergibt sich auf der rechten Seite genau wie im ersten Kapitel t^N.

2. $W(t)$ ist eine eindeutig berechenbare rationale Funktion in t. $\diamond$

Beweis

1. Wenn W endlich ist, funktioniert der Beweis wie in Kapitel 1 (1.11). Wenn W unendlich ist, ist die Menge $K := \{s \in S \mid l(ws) > l(w)\}$, die im Beweis verwendet wird, für alle $w \in W$ nicht leer, so dass bei der Berechnung die rechte Seite der Gleichung Null ergibt.

2. Wir führen eine Induktion über $|S|$ durch. Für $|S| = 1$ ist $W(t) = 1 + t$. Sei nun $|S| > 1$. Nach der ersten Aussage gilt, nachdem man den Term für $I = S$ auf die andere Seite der Gleichung gebracht hat

$$\sum_{I \subsetneq S} (-1)^I \frac{W(t)}{W_I(t)} = f(t)$$

   mit $f(t) := -(-1)^S$, wenn W unendlich ist und $f(t) := t^N - (-1)^S$, wenn W endlich ist. Teilt man beide Seiten der Gleichung durch $W(t)$ ergibt sich

$$\sum_{I \subsetneq S} (-1)^I \frac{1}{W_I(t)} = \frac{f(t)}{W(t)}.$$

   Die linke Seite der Gleichung beinhaltet nur solche $W_I(t)$, für die $I \subsetneq S$ gilt. Daher handelt es sich nach Induktionsvoraussetzung um eine berechenbare rationale Funktion in t. Daher kann auch $W(t)$ als rationale Funktion berechnet werden. $\square$

(9.3) Beispiel

Als Beispiel betrachten wir die unendliche Diedergruppe, also $W = D_\infty$ mit $S = \{s, s'\}$ und $m(s, s') = \infty$. Wendet man die Definition von $W(t)$ an, ergibt sich $W(t) = 1 + 2t + 2t^2 + \ldots$. Betrachten wir die $I \subsetneq S$, so ergibt sich $W_I(t) = 1$ für $I = \emptyset$ und $W_I(t) = 1 + t$ für $I = \{s\}$ oder $I = \{s'\}$. Damit erhält man auf der linken Seite der Gleichung, mit der man $W(t)$ als rationale Funktion berechnen kann

$$\sum_{I \subsetneq S} (-1)^I \frac{1}{W_I(t)} = (-1)^\emptyset \frac{1}{W_\emptyset(t)} + (-1)^{\{s\}} \frac{1}{W_{\{s\}}(t)} + (-1)^{\{s'\}} \frac{1}{W_{\{s'\}}(t)} = 1 - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t}.$$

Auf der rechten Seite ergibt sich $\frac{f(t)}{W(t)} = \frac{-(-1)^S}{W(t)} = \frac{-(-1)^2}{W(t)} = -\frac{1}{W(t)}$. Durch Auflösen nach $W(t)$ erhält man also

$$W(t) = \frac{1+t}{1-t}. \qquad \diamond$$

§ 10 Fundamentalbereiche von W

In diesem Abschnitt geht es um die geometrischen Zusammenhänge parabolischer Untergruppen. Allerdings haben wir jetzt im Gegensatz zu Spiegelungsgruppen keinen euklidischen Raum. Wir betrachten die duale Abbildung $\sigma^* : W \to GL(V^*)$. Elemente aus V^* werden wir mit $f, g, h, \ldots$ bezeichnen.

(10.1) Definition
Jetzt können wir für jedes $s \in S$ eine *Hyperebene* angeben und zwar

$$Z_s := \{f \in V^* | f(a_s) = 0\}. \tag{5}$$

Außerdem erhalten wir jetzt zwei Halbräume, die denen in euklidischen Räumen entsprechen, wobei wir uns hier einer Abbildung $\sigma : W \to GL(V^*)$ als Hilfestellung bedient haben, da es an sich keine direkte Analogie zu diesen Halbräumen und der zugehörigen Spiegelungshyperebene gibt.

$$A_s := \{f \in V^* | f(a_s) > 0\} \tag{6}$$
$$A'_s := \{f \in V^* | f(a_s) < 0\} \tag{7}$$

Weiterhin definieren wir $C := \bigcap_{s \in S} A_s$ und $\tilde{C} := \{w(C_I) | w \in W, I \subset S\}$.. $\diamond$

(10.2) Lemma
Sei $s \in S$ und $w \in W$. Dann ist $l(sw) > l(w)$, genau dann wenn $w(C) \subset S$ gilt. Analog ist $l(sw) < l(w)$ äquivalent zu $w(C) \subset A'_s$. $\diamond$

Beweis
Aus $l(sw) > l(w)$ folgt, dass $l(w^{-1}s) > l(w^{-1})$ ist. Somit gilt $w^{-1}(a_s) > 0$. Falls $f \in C$ liegt, ist $w^{-1}(a_s) > 0$, so wie C definiert ist. Also ist $w(C) \subset A_s$ äquivalent zu $l(sw) > l(w)$. $\square$

(10.3) Definition
Es seien

$$\overline{A_s} := A_s \cup Z_s \tag{8}$$
$$D := \overline{C} = \bigcap_{s\in S} \overline{A_s} \tag{9}$$
$$C_I := (\bigcap_{s\in I} Z_s) \cap (\bigcap_{s\notin I} A_s) \tag{10}$$
$$U := \bigcup_{w\in W} w(D) \tag{11}$$
$$. \tag{12}$$

◇

Diese Menge D ist ein konvexer Kegel, woraus folgt, dass auch U ein konvexer Kegel,genauer gesagt der Tits Kegel, ist, ähnlich wie bei den Spiegelungsgruppen.

(10.4) Satz
a)Sei $w \in W$ und $I, J \subset S$. Falls $w(C_I) \cap C_J \neq \emptyset$ ist, sind I und J gleich und $w \in W_I$, also gilt $w(C_I) = C_I$. Insbesondere ist W_I der Stabilisator in W von jedem Punkt C_I und $\tilde{C}$ ist eine Partition von U.
b)D ist ein Fundamentalbereich von W bezüglich U, die W-Bahn jedes Punktes von U schneidet D in genau einem Punkt.
c) Der Kegel U ist konvex und jedes abgeschlossene Intervall schneidet nur endlich viele Mengen aus $\tilde{C}$. ◇

Beweis
a)Wir führen eine Induktion über $l(w)$ durch. (IA)Es sei $l(w) = 0$. Dann ist w eindeutig, da $w = 1$.
(IV)Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $l(w)$.
(IS) Falls $l(w) > 0$ ist, gibt es ein $s \in S$ mit $l(sw) < l(w)$. Mit 10.2 ist nun $w(C) \subset s(A_s) = A'_s$ und somit $w(D) \subset \overline{A'_s}$. Wegen $D \subset \overline{A}_s$ ist $D \cap w(D) \subset Z_s$. Nun fixiert s alle Punkte dieses Schnittes, genau genommen jeden Punkt der nichtleeren Menge $C_J \cap w(C_J)$. Daraus folgt, dass s einen Punkt in C_J festhält und $s \in J$. Außerdem ist $C_J \cap sw(C_I) = s(C_J \cap w(C_I)$ nichtleer. Mit der Induktionsvoraussetzung, angewendet auf sw, folgt nun $I = J$ und $sw \in W_I$. Da $s \in J = I$ ist, erhalten wir nun $w \in W_I$. Jetzt können wir folgern, dass die Mengen $w(C_I)$ disjunkt sind.
b)Nach Definition von U, schneidet jeder W-Orbit D in U in mindestens einem Punkt. Angenommen $f, g \in D$ lägen im selben W-Orbit: Also gilt $w(f) = g$ für ein $w \in W$. Sei also $f \in C_I, g \in C_J$, somit ist $w(C_I) \cap C_J \neq \emptyset$. Dann folgt mit a), dass $I = J$ und $w \in W_I$, also $f = w(f) = g$.

c)Es genügt zu zeigen, dass aus $f, g \in U$ folgt, dass das abgeschlossene Intervall $[f, g]$ eine Überdeckung aus endlich vielen $w(C_I)$ besitzt. Falls $f, g \in D$ sind, folgt das aus der Konvexität von D. Für die allgemeinere Aussage ersetzen wir f, g durch ihre Bilder unter einem $w \in W$. Jetzt können wir o.B.d.A. annehmen, dass $f \in D, g \in w(D)$ gilt. Wir führen erneut eine Induktion über $l(w)$ durch. Das Intervall $[f, g]$ schneidet D in einem abgeschlossenen Intervall $[f, h]$, was von endlich vielen Mengen $w(C_I)$ überdeckt werden kann. Wir nehmen an, dass $g \notin D$, da wir sonst fertig wären. Sei also $g \in A'_s$ für $s \in I$ und $g \in \overline{A_s}$ für $s \notin I$. Falls $h \in A_s, s \in I$ gelte, lägen alle Punkte k aus einer Umgebung von h auch in D. Also ist $h \in Z_s$ für ein $s \in I$. Da $g \in A'_s$ ist, muss $w(D) \subset \overline{A'_s}$, also $w(C) \subset A'_s$ gelten. Mit 10.2 erhalten wir $l(sw) < l(w)$. Jetzt können wir die Induktionsvoraussetzung auf $h \in D$ anwenden und es gilt $s(g) \in sw(D)$. Also hat das Intervall $[h, s(g)]$ eine endliche Überdeckung.

Betrachten wir jetzt das Wortproblem, bei dem entschieden werden soll, ob zwei Worte also Produkte von Elementen aus S gleich sind, so haben wir nun mit obigem Satz eine Möglichkeit dieses Problem zu lösen. Wollen wir beispielsweise den Wahrheitsgehalt der Gleichung $s_1 \dots s_r = s_k \dots s_t$ überprüfen, so formen wir die Gleichung um zu $1 = s_1 \dots s_r s_t \dots s_k =: w$. Jetzt legt man eine Basis von V bestehend aus $a_s (s \in S)$ fest. Sei nun $\{f_s | s \in S\}$ die duale Basis. Dann liegt $f := \sum f_s$ in C und wird daher von keinem Element aus W außer 1 festgehalten. Somit lässt sich leicht feststellen, ob $w = 1$ tatsächlich gilt.