Coxetergruppen

Vortrag zum fünften Kapitel von Humphreys, 11.01.2013

Nadine Friesen und Antje Tasche

(1.1) Definition
Ein *Coxetersystem* ist ein Paar (W, S), wobei W eine Gruppe ist, die von einer Menge $S \subset W$ erzeugt wird. Für alle $s, s' \in S$ gilt einzig die Relation

$$(ss')^{m(s,s')} = 1, \tag{1}$$

mit $m(s,s) = 1, m(s,s') \geqslant 2$ für $s \neq s'$. Falls für s, s' keine solche Relation gilt, schreiben wir $m(s,s') = \infty$.

(1.2) Definition
Wir bezeichnen $|S|$ als den *Rang* von (W, S) und W unter diesen Voraussetzungen als *Coxetergruppe*.

(1.3) Lemma
Es gibt einen eindeutigen Epimorphismus $\epsilon : W \to \{1, -1\}$, der jeden Erzeuger $s \in S$ auf -1 schickt. Somit liegen alle $(s, s')^{m(s,s')}$ im Kern und wir erhalten eine Verallgemeinerung der Determinanten in der $O(V)$ beziehungsweise des Vorzeichens der symmetrischen Gruppe.

(2.1) Definition
Auch für Coxetergruppen definieren wir eine *Länge* $l(w)$, die weiterhin die minimale Anzahl r von Erzeugern angibt, die nötig sind, um w als $w = s_1 \dots s_r$ zu schreiben, wobei $s_i \in S$ ist und $s_i = s_j$ erlaubt ist. Dann wird jede Schreibweise von w als Produkt von r Elementen aus S als *reduziert* bezeichnet. Es wird $l(1) = 0$ gesetzt.

(2.2) Lemma
Ist $w = s_1 \dots s_i \dots s_j \dots s_r$ ein reduzierter Ausdruck für w, so ist $l(w' = s_i \dots s_j) = j - i + 1$

(2.3) Lemma
Es gelten die folgenden Eigenschaften der Längenfunktion

1. $l(w) = l(w^{-1})$,
2. $l(w) = 1 \Leftrightarrow w \in S$,
3. $l(ww') \leqslant l(w) + l(w')$,
4. $l(ww') \geqslant l(w) - l(w')$,

5. $l(w) - 1 \leqslant l(ws) \leqslant l(w) + 1$,
6. $\epsilon(w) = (-1)^{l(w)}$,
7. $l(ws) = l(w) \pm 1$.

(3.1) Definition
Eine *Spiegelung* ist eine lineare Abbildung, die eine Hyperebene punktweise fest lässt und einen Vektor ungleich Null auf sein Negatives schickt.

Sei V ein reeller, $|S|$-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\{\alpha_s \mid s \in S\}$. Auf V definieren wir eine symmetrische Bilinearform B durch

$$B(\alpha_s, \alpha_{s'}) = -\cos\left(\frac{\pi}{m(s,s')}\right),$$

wobei $B(\alpha_s, \alpha_{s'}) = -1$ gelten soll, falls $m(s,s') = \infty$ ist. Es gilt $B(\alpha_s, \alpha_s) = 1$ und $B(\alpha_s, \alpha_{s'}) \leq 0$ für $s \neq s'$.

Zu $s \in S$ definieren wir $\sigma_s : V \to V$ durch

$$\sigma_s(\lambda) = \lambda - 2B(\alpha_s, \lambda)\alpha_s.$$

(3.3) Lemma
Es gibt einen eindeutigen Homomorphismus $\sigma : W \to GL(V), s \mapsto \sigma_s$, der *geometrische Darstellung* von W genannt wird. Für jedes Paar $s, s' \in S$ ist die Ordnung des Elements ss' genau $m(s,s')$.

Im Folgenden verwenden wir die Schreibweise $w(\alpha_s)$ statt $\sigma(w)(\alpha_s)$ für $w \in W$ und $s \in S$.

(4.1) Definition
Als *Wurzelsystem* von W bezeichnen wir die Menge

$$\Phi := \{w(\alpha_s) \mid w \in W, s \in S\}.$$

Die Elemente von Φ nennen wir wie zuvor *Wurzeln*.

(4.3) Definition
Wie im ersten Kapitel definieren wir eine *parabolische Untergruppe* W_I von W als eine Untergruppe von W, die von einer Teilmenge I von S erzeugt wird, also
$W_I := \langle\{s \mid s \in I\}\rangle$. Mit l_I bezeichnen wir die zugehörige Längenfunktion.

(4.4) Satz
Sei $w \in W$ und $s \in S$. Falls $l(ws) > l(w)$ gilt, dann ist $w(\alpha_s) > 0$. Falls $l(ws) < l(w)$ gilt, dann ist $w(\alpha_s) < 0$.

(4.5) Folgerung
Jede Wurzel $\alpha \in \Phi$ ist entweder positiv oder negativ, also $\Phi = \Phi^+ \dot\cup \Phi^-$.

(4.6) Korollar
Die Darstellung $\sigma : W \to GL(V)$ ist treu.

(5.1) Satz

1. Für jede Teilmenge I von S ist (W_I, S) mit den Werten $m(s, s')$ ein Coxetersystem.

2. Gelte $I \subseteq S$. Falls $w = s_1 \cdots s_r$ mit $s_i \in S$ ein reduzierter Ausdruck ist und $w \in W_I$ gilt, dann sind alle $s_i \in I$. Insbesondere gilt $l(w) = l_I(w)$ für alle $w \in W_I$ und $W_I \cap S = I$.

3. Die Zuordnung $I \mapsto W_I$ definiert einen Verbandsisomorphismus zwischen der Menge der Teilmengen von S und der Menge der Untergruppen W_I von W.

4. S ist ein minimales Erzeugendensystem von W.

(6.1) Lemma

1. Wenn $s \in S$ ist, gilt $s(\Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}$.

2. Für jedes $w \in W$ entspricht $l(w)$ der Anzahl der positiven Wurzeln, die von w auf negative Wurzeln abgebildet werden.

(9.1) Definition
Wir bezeichnen

$$W(t) := \sum_{n \geq 0} a_n t^n$$

mit $a_n := |\{w \in W \mid l(w) = n\}|$ als *Poincaré-Reihe* von W.

(9.2) Lemma

1. Im Ring der formalen Potenzreihen in t gilt für unendliches W die Identität

$$\sum_{I \subseteq S} (-1)^I \frac{W(t)}{W_I(t)} = \sum_{I \subseteq S} (-1)^I W^I(t) = 0.$$

   Ist W endlich, ergibt sich auf der rechten Seite genau wie im ersten Kapitel t^N.

2. $W(t)$ ist eine eindeutig berechenbare rationale Funktion in t.

(7.1) Folgerung
Somit hängt wsw^{-1} nur von dem zugehörigen a, aber nicht von der genauen Wahl von s oder w ab, weshalb wir es als s_a bezeichnen werden. Mit $s_a(a) = a - 2B(a,a)a = a - 2a = -a$ und $s_a(\lambda) = \lambda - 2B(\lambda,a)a = \lambda$ für alle λ aus der Hyperebene, für die $B(\lambda,a) = 0$ gilt, ist leicht erkennbar, dass es sich bei s_a um eine Spiegelung handelt.

(7.2) Lemma
Sei $a, b \in \Phi$. Wenn $b = w(a)$ für ein $w \in W$ gilt, ist $ws_a w^{-1} = s_b$.

(7.3) Satz
Sei $w \in W, a \in \Phi$. Dann ist $l(ws_a) > l(w)$ äquivalent zu $w(a) > 0$.

(8.1) Satz
Sei $w = s_1 \dots s_r$ (mit $s_i \in S$) nicht unbedingt reduziert. Falls eine Spiegelung $t \in T$ existiert mit $l(wt) < l(w)$, gibt es einen Index i, für den $wt = s_1 \dots s_i \hat{s_i} \dots s_r$ gilt. Falls die Schreibweise für w reduziert ist, ist i eindeutig.

(8.2) Satz
Falls $w = s_1 \dots s_r$ und $l(w) < r$ gilt, gibt es Indizes $i < j$ mit $w = s_1 \dots s_i \hat{s_i} \dots s_j \hat{s_j} \dots s_r$.

(10.1) Definition
Jetzt können wir für jedes $s \in S$ eine *Hyperebene* angeben und zwar

$$Z_s := \{f \in V^* | f(a_s) = 0\}. \tag{2}$$

Außerdem erhalten wir jetzt zwei Halbräume, die denen in euklidischen Räumen entsprechen, wobei wir uns hier einer Abbildung $\sigma : W \to GL(V^*)$ als Hilfestellung bedient haben, da es an sich keine direkte Analogie zu diesen Halbräumen und der zugehörigen Spiegelungshyperebene gibt.

$$A_s := \{f \in V^* | f(a_s) > 0\} \tag{3}$$
$$A'_s := \{f \in V^* | f(a_s) < 0\} \tag{4}$$

Weiterhin definieren wir $C := \bigcap_{s \in S} A_s$ und $\tilde{C} := \{w(C_I) | w \in W, I \subset S\}$.

(10.2) Lemma
Sei $s \in S$ und $w \in W$. Dann ist $l(sw) > l(w)$, genau dann wenn $w(C) \subset S$ gilt. Analog ist $l(sw) < l(w)$ äquivalent zu $w(C) \subset A'_s$.

(10.3) Satz
a)Sei $w \in W$ und $I, J \subset S$. Falls $w(C_I) \cap C_J \neq \emptyset$ ist, sind I und J gleich und $w \in W_I$, also gilt $w(C_I) = C_I$. Insbesondere ist W_I der Stabilisator in W von jedem Punkt C_I und $\tilde{C}$ ist eine Partition von U.
b)D ist ein Fundamentalbereich von W bezüglich U, die W-Bahn jedes Punktes von U schneidet D in genau einem Punkt.
c) Der Kegel U ist konvex und jedes abgeschlossene Intervall schneidet nur endlich viele Mengen aus $\tilde{C}$.