Erinnerung: Sei (W, S) ein Coxeter-System von Rang n (also $|S| = n$) und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Basis $(\alpha_{s_1}, ..., \alpha_{s_n})$. Definiere zu $s \in S$ den Operator $\sigma_s : V \to V, \lambda \mapsto \lambda - 2B(\lambda, \alpha_s)\alpha_s$ auf V, wo $B(\alpha_{s_i}, \alpha_{s_j}) := -cos(\frac{\pi}{m(s_i,s_j)})$ ist und B linear fortgesetzt auf V wird. Dann ist σ, die lineare Fortsetzung von σ_s auf W, eine treue Darstellung von W auf V (s. Kapitel 5).

Teilklassifizierung von Coxeter-Gruppen

In diesem Abschnitt werden die Coxeter-Gruppen (zumindest bis zu einem gewissen Grad) über die oben genannte Bilinearform B klassifiziert.

Irreduzible Coxeter-Systeme

Definition (Irreduzibel) Ein Coxeter-System, bzw. eine Coxeter-Gruppe, heißt irreduzibel, wenn der zugehörige Coxeter-Graph zusammenhängend ist. $\diamond$

Folgende Proposition besagt, dass eine Klassifizierung irreduzibler Coxeter-Gruppen auch schon eine Klassifizierung aller Coxeter-Gruppen liefert.

Proposition (6.1) Sei (W, S) ein Coxeter-System mit zugehörigem Coxeter-Graph Γ und $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ seien die Zusammenhangskomponenten von Γ. Weiterhin seien $S_1, ..., S_n$ die zu $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ gehörenden Untergruppen von S.
Dann ist W das direkte Produkt der parabolischen Untergruppen $W_{S_1}, ..., W_{S_n}$. $\diamond$

Aussagen über σ und V mithilfe des Radikals

Sei $V^\perp = \{\lambda \in V | B(\lambda, \mu) = 0 \text{ für alle } \mu \in V\} \subsetneqq V$ das Radikal von V bezgl. B. Für $s \in S$ sei außerdem $H_s := \{\lambda \in V | B(\lambda, \alpha_s) = 0\}$ das orthogonale Komplement von $< \alpha_s >$. Dann gilt

- $V^\perp$ ist W-invariant
- $V^\perp = \cap_{s \in S} H_s$, also ist $w\lambda = \lambda$ für alle $w \in W$ und $\lambda \in V^\perp$

Mithilfe dieser Eigenschaften kann die folgende Proposition bewiesen werden. Diese wird für den Beweis von Satz (6.4) (s.u.) benötigen, ist aber auch an sich schon nicht uninteressant.

Proposition (6.3) Sei (W, S) ein irreduzibles Coxeter-System. Dann gelten:

a) Alle W-invarianten echten Unterräume von V sind in $V^\perp$ enthalten.

b) Wenn B ausgeartet ist, ist σ nicht halbeinfach (das Komplement jedes W-invarianten Teilraums von V ist W-invariant)

c) Wenn B nicht ausgeartet ist, ist σ einfach (es gibt keine W-invarianten Teilräume von V)

d) Sei $z : V \to V$ ein Endomorphismus auf V, der mit der Operation von W auf V kommutiert ($z(w\lambda) = wz(\lambda)$ für alle $w \in W$, $\lambda \in V$). Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $z = c\ Id_V$. $\diamond$

Klassifizierung von irreduziblen Coxeter-Gruppen über die Bilinearform B

Alle irreduziblen Coxeter-Gruppen mit assoziierter Bilinearform B fallen unter genau einen der folgenden fünf Fälle:

1. **B ist positiv definit**
   Dieser Fall liefert genau die endlichen Spiegelungsgruppen

   Satz (6.4) Die folgenden drei Eigenschaften einer Coxeter-Gruppe W sind äquivalent:

   a) W ist endlich

   b) Die zu W gehörige Bilinearform B ist positiv definit

   c) W ist eine endliche Spiegelungsgruppe ◇

2. **B ist nicht positiv definit, aber positiv semidefinit (also ausgeartet)**
   Die Coxeter-Graphen der Coxeter-Gruppen aus diesem Fall (s. Kapitel 2) stimmen genau mit den Graphen der affinen Weyl-Gruppen (s. Kapitel 4) überein. Dieser Fall liefert also genau die affinen Weyl-Gruppen.

3. **B ist nicht positiv semidefinit (also auch nicht positiv definit) und ausgeartet**
   Dieser Fall wird hier nicht behandelt.

4. **B ist nicht positiv definit und nicht ausgeartet**
   In diesem Fall wird anhand der folgenden Eigenschaft **(E)**, noch einmal zwischen zwei verschiedenen Fällen unterschieden:
   (E) Für alle $s \in S$ gilt: Entfernt man den zu s korrespondierenden Knoten aus dem Coxeter-Graphen, so erhält man einen Graphen positiven Typs

   a) **B ist nicht positiv definit und nicht ausgeartet und hat die Eigenschaft (E)**
   Dieser Fall liefert die sogenannten hyperbolischen Coxeter-Gruppen (s. Prop (6.8)).

   Definition (hyperbolisch) Sei (W, S) ein irreduzibles Coxeter-System.
   Sei $C := \{\lambda \in V | B(\lambda, \alpha_s) < 0$ für alle $s \in S\}$. (W, S) bzw. W heißt hyperbolisch, falls B die Signatur $(n-1, 1, 0)$ (Schreibweise: $(+, -, 0)$) hat und $B(\lambda, \lambda) < 0$ für alle $\lambda \in C$. ◇

   Proposition (6.8) Sei (W, S) ein irreduzibles Coxeter-System mit assoziierter Bilinearform B. Dann ist (W, S) genau dann hyperbolisch, wenn B nicht positiv definit und nicht ausgeartet ist und (W, S) die Eigenschaft **(E)** hat. ◇

   b) **B ist nicht positiv definit und nicht ausgeartet und hat nicht die Eigenschaft (E)**
   Dieser Fall wird hier nicht behandelt.

Charakterisierung der kristallographischen Coxeter-Gruppen

Unabhängig von der Teilklassifizierung der Coxeter-Gruppen hier noch eine Charakterisierung der kristallographischen Coxeter-Gruppen.

Proposition (6.6) Sei (W, S) ein Coxeter-System mit Coxeter-Graph Γ.
W ist genau dann crystallographisch, wenn $m(s,t) \in \{2, 3, 4, 6, \infty\}$ für alle $s, t \in S$ und das Folgende gilt: In jedem Zyklus von Γ (wenn Γ keine Zyklen hat, entfällt diese Bedingung also) ist die Anzahl der mit 4 und die Anzahl der mit 6 gewichteten Kanten jeweils gerade. ◇