Invarianten von Spiegelungsgruppen (Teil iv)

Malte Milatz Seminar im Dezember 2012

Gegeben sei eine Spiegelungsgruppe G auf dem Vektorraum V. Zu jedem einfachen System nennt man das Produkt der einfachen Spiegelungen $w = s_1 \cdots s_n$ ein ***Coxeter-element***.

Proposition 1. Die Coxeterelemente bilden eine Konjugiertenklasse von G.

- Sie haben also dieselbe Ordnung h, genannt ***Coxeterzahl***.
- Jedes Coxeterelement hat dieselben Eigenwerte, die man mit $\zeta = \exp \frac{2\pi i}{h}$ eindeutig schreiben kann als $\zeta^{m_1}, \dots, \zeta^{m_n}$ mit $0 \le m_1 \le \dots \le m_n \le h-1$. Die m_i nennt man die ***Exponenten*** von G.

Ist $S_1 \times \dots \times S_l$ die Zerlegung von G in seine parabolischen Untergruppen, so erhält man die Coxeterelemente von G als Produkt von Coxeterelementen der S_i. Die Coxeterzahl von G ist entsprechend der ggT der Coxeterzahlen der S_i.

Im folgenden wird angenommen, daß G (Coxeter-)irreduzibel sei und außerdem keine Fixpunkte außer 0 habe. In dieser Situation ist das Ziel, zu zeigen: Die Grade von G hängen direkt mit den Exponenten zusammen, nämlich $d_i = m_i + 1$.

Lemma 1. $\sum_i m_i = \frac{nh}{2}$.

Lemma 2. Nach eventueller Umnummerierung gibt es einen Index r, so daß $s_1, \dots, s_r$ untereinander sowie $s_{r+1}, \dots, s_n$ untereinander kommutieren.

Wiederholung:

- Die Grade erfüllen $d_1 + \dots + d_n = n + N$, wo N die Anzahl der Spiegelungen in G bezeichnet.
- $D = \{b_1\omega_1 + \dots + b_n\omega_n \mid b_1, \dots, b_n \ge 0\}$ ist ein Fundamentalbereich der Operation, und die Elemente von $C = \{b_1\omega_1 + \dots + b_n\omega_n \mid b_1, \dots, b_n > 0\}$ haben trivialen Stabilisator.
- A hat im Coxeter-irreduziblen Fall einen Eigenvektor $(c_1, \dots, c_n)$ mit $c_i > 0$ $\forall i$ und mit Eigenwert $c > 0$.

Notation:

- Einfaches System $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, gemäß Lemma 2 nummeriert
- Zugehörige Spiegelungen $s_1, \dots, s_n$ und Hyperebenen $H_i = H_{s_i}$
- Zugehöriges Coxeterelement $w = s_1 \cdots s_n$
- Grammatrix $A = ((\alpha_i, \alpha_j))_{i,j}$
- $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ Basis mit $(\omega_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$
- N = Anzahl der Spiegelungen in G

- $P = \mathbb{R}\lambda + \mathbb{R}\mu \subset V$ mit $\lambda = c_1\omega_1 + \cdots + c_r\omega_r$ und $\mu = c_{r+1}\omega_{r+1} + \cdots + c_n\omega_n$
- $\nu = c_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + c_n\alpha_n$

Die Ebene $P = \mathbb{R}\lambda + \mathbb{R}\mu$ hat folgende Eigenschaften.

- $(c-1)\lambda = -\mu + \nu$.
- P ist invariant unter G.
- $w|_P$ ist eine Rotation um $\frac{2\pi i}{h}$, und das ist der doppelte Winkel zwischen λ und μ.
- Durch Rotation unter w entstehen aus den Geraden $\mathbb{R}\lambda$ und $\mathbb{R}\mu$ zusammen genau h Geraden.
- Die Spiegelungen s mit $H_s \cap P = \mathbb{R}\lambda$ sind genau $s_{r+1}, \ldots, s_n$. ($n-r$ viele)
- Analog sind die Spiegelungen s mit $H_s \cap P = \mathbb{R}\mu$ genau $s_1, \ldots, s_r$. (r viele)

Proposition 2. Die Anzahl der Spiegelungen ist $N = \frac{nh}{2}$.

Satz. Es sei G eine Coxeter-irreduzible, fixpunktfreie Spiegelungsgruppe mit Exponenten $m_1 \leq \cdots \leq m_n$ und Graden $d_1 \leq \cdots \leq d_n$. Dann gilt

$$d_i = m_i + 1.$$

Proposition 3. Ist bei den ansonsten gleichen Voraussetzungen $G = W$ sogar eine Weyl-Gruppe, so kommt *jede* primitive Einheitswurzel als Eigenwert der Coxeterelemente vor.