Invariantenringe von Spiegelungsgruppen

Seminar zur Gruppentheorie

Clara Nadenau

7. Dezember 2012

Sei im Folgenden K ein Körper der Charakteristik 0 und $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum der Dimension n, sofern nicht anders definiert.

Definition (Grade einer (Spiegelungs-)Gruppe)
Sei $G \subseteq \mathrm{GL_n}(\mathcal{V})$ eine endliche Gruppe und $\{f_1, \ldots, f_m\}$ ein homogenes, algebraisch unabhängiges Erzeugendensystem des zugehörigen Invariantenringes $K[x_1, \ldots, x_n]^G$, sowie $d_i = \deg(f_i)$ für $1 \leq i \leq n$.
Dann nennt man die Menge $\{d_1, \ldots, d_n\}$ *Grade* von G.

Satz
Sei $G \subseteq \mathrm{GL_n}(\mathcal{V})$ eine endliche Gruppe. Seien $\{f_1, \ldots, f_n\}$ sowie $\{g_1, \ldots, g_n\}$ zwei Erzeugendensysteme von $K[x_1, \ldots, x_n]^G$ mit Graden $\{d_1, \ldots, d_n\}$ und $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Dann gibt es eine Permutation $\pi \in S_n$, so dass gilt

$$d_i = e_{\pi(i)} \text{ für } 1 \leq i \leq n.$$

Satz
Sei $\mathcal{V}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Seien $W \subseteq \mathrm{GL_n}(\mathcal{V})$ eine Spiegelungsgruppe und seien $d_1, \ldots, d_n$ die Grade von W, sowie N die Anzahl der Spiegelungen in W. Dann gilt

$$\prod_{i=1}^{n} d_i = |W| \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} d_i = N + n.$$

Definition
Seien $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Die Jacobi-Determinante von $f_1, \ldots, f_n$ ist definiert durch

$$J(f_1, \ldots, f_n) := \det((\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j}).$$

Satz
Die Polynome $f_1, \ldots, f_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$ sind algebraisch unabhängig, genau dann wenn

$$J(f_1, \ldots, f_n) \neq 0$$

gilt.

Satz (Shephard-Todd)
Sei $\mathcal{V}$ ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und $G \subseteq \mathrm{GL_n}(\mathcal{V})$ eine endliche Gruppe, die natürlich auf $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ operiert.
Wird $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^G$ von n algebraisch unabhängigen homogenen Polynomen $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ erzeugt, so ist G eine Spiegelungsgruppe.

Satz
Sei $W \subseteq \mathrm{GL_n}(\mathcal{V})$ eine endliche Spiegelungsgruppe und $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^W$ homogen und algebraisch unabhängig. Seien weiter $\deg(g_i) = e_i$ und $\prod_{i=1}^{n} e_i = |W|$. Dann gilt $\mathbb{R}[g_1, \ldots, g_n] = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^W$.