Kristallographische Spiegelungsgruppen

Sebastian Schönnenbeck

Seminar zur Gruppentheorie - 30.11.2012

1 Kristallographische Spiegelungsgruppen

Definition 1.1 *Eine endliche Spiegelungsgruppe $W \leq \mathcal{O}(V)$ heißt kristallographisch, falls es ein Gitter $L \leq V$ (also L $\mathbb{Z}$-Erzeugnis einer Basis von V) gibt mit der Eigenschaft: $WL \subset L$*

Lemma 1.2 *Ist W kristallographisch und Φ das zugehörige Wurzelsystem, so ist $m(\alpha, \beta) \in \{2, 3, 4, 6\}$ $\forall$ $\alpha, \beta \in \Phi$.*

Definition 1.3 *Ein Wurzelsystem $\Phi \subset V$ heißt kristallographisch, falls*

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z} \; \forall \; \alpha, \beta \in \Phi.$$

Die zugehörige Spiegelungsgruppe heißt dann auch die Weyl-Gruppe von Φ.

Lemma 1.4 *Ist Φ irreduzibel, so treten höchstens zwei Längen von Wurzeln auf. Wir nennen die Wurzeln dann „lang“ bzw. „kurz“ und das Verhältnis der quadrierten Längen ist 2 oder 3.*

Bemerkung 1.5 *W operiert transitiv auf der Menge der langen und auf der Menge der kurzen Wurzeln.*

Bemerkung 1.6 *Sei Δ ein einfaches System. Bezüglich der Halbordnung $a \leq b \Leftrightarrow b - a$ ist nicht-negative Linearkombination der Elemente von Δ enthält Φ ein eindeutiges größtes Element. Dieses ist eine lange Wurzel und wird im Folgenden mit $\tilde{\alpha}$ bezeichnet.*

Definition 1.7 *Setze $\alpha^\vee := \frac{2}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ die Cowurzel (coroot) zu α. Dann bildet $\Phi^\vee$ wieder ein kristallographisches Wurzelsystem mit einfachem System $\Delta^\vee$, das inverse oder duale Wurzelsystem.*

Bemerkung 1.8 1. *Die Weylgruppe von $\Phi^\vee$ ist wieder W.*

2. *Kurze Wurzeln aus Φ liefern (unter obiger Konstruktion) lange Wurzeln von $\Phi^\vee$ und umgekehrt.*

Definition 1.9 $\mathrm{L}(\Phi) := \langle\Phi\rangle_{\mathbb{Z}}$ *heißt das (zu Φ gehörende) Wurzelgitter.*

Definition 1.10 $\hat{\mathrm{L}}(\Phi) := \{v \in V \mid (v, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}\ \forall\ \alpha \in \Phi\}$ *heißt das Gewichtsgitter (weight lattice) zu Φ und $\hat{\mathrm{L}}(\Phi^\vee) := \{v \in V \mid (v, \alpha) \in \mathbb{Z}\ \forall\ \alpha \in \Phi\}$ das Cogewichtsgitter (coweight lattice).*

2 Ordnungen endlicher Spiegelungsgruppen

Bemerkung 2.1 *Es ist $|W| = |W\tilde{\alpha}| \cdot |\mathrm{Stab}_W(\tilde{\alpha})| = |\{\gamma \in \Phi \mid \gamma \text{ lange Wurzel}\}| \cdot |\langle\alpha \mid \alpha \in \Delta, (\alpha, \tilde{\alpha}) = 0\rangle|$. $\langle\alpha \mid \alpha \in \Delta, (\alpha, \tilde{\alpha}) = 0\rangle$ ist wieder Spiegelungsgruppe von geringerem Rang als W. Bestimme also $|W|$ rekursiv.*

A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$(n+1)!$	$2^n n!$	$2^{n-1}n!$	$2^7 3^4 5$	$2^{10}3^4 5 \cdot 7$	$2^{14}3^5 5^2 7$	$2^7 3^2$	12

3 Typ H_3 und H_4

Lemma 3.1 *Existiert eine Gruppe mir Coxetergraph vom Typ H_3, so hat diese Ordnung* 120.

Satz 3.2 *Jede endliche Untergruppe gerader Ordnung von $\mathbb{H}^*$ ist ein Wurzelsystem.*